第二章　数形结合的思想

中学数学研究的对象可分为数与形两大部分，而数与形是有联系的，这个联系的应用常称之为数形结合.

实验告诉我们：有丰富形象的材料比纯抽象材料容易记忆. 据双重编码理论，抽象材料只有言语编码，而形象材料既有言语编码，又有表象编码，这样的编码可以延长记忆. 针对一般中学生的智力特点，他们是以第一信号系统占优势的，所以直观的形象记忆比逻辑记忆发达；因此在数学教学中，讲到符号语言表达的抽象材料，可以尽量配以一定的直观形象的图形、模型来增强记忆效果. 数与形是对立统一的，数量关系往往隐含着几何模型，几何问题又时时牵涉到数量关系，图形有形象直观的优点，往往能起定性的作用，而在定量方面必须借助于代数的计算分析，两者结合，取长补短能收到事半功倍的效果，在数学解题中数形结合具有极为独特的策略指导与调节作用.

中外数学家对数形结合解题十分重视，华罗庚先生说："数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞？数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休，切莫忘：几何代数统一体，永远联系，切莫分离."美国数学家斯蒂恩说："如果一个特定的问题可以被转化为一个图形，那么思想就整体地把握了问题，并且能创造性地思索问题的解法."数学家柯尔莫戈罗夫也说："在只要有可能的地方，数学家总是力求把他们研究的问题尽量地变成可借用几何直观的问题."他们都明确地指出了数学解题中的数形结合以及互相转化的思维方法，通过"以形助教"及"以数辅形"寻找巧妙快捷的解题路线，本章就这一问题进行一些探索.

第一节　实现数形结合的关键是转化

$\boxed{\text{例 1}}$ (1) 方程 $x^{\frac{1}{2}}=3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的解的个数是________.

(2) 方程 $\cos x=x+\sin x$ 的实根的个数是________.

(3) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0,\end{cases}$ 则满足不等式 $f(1-x^2)>f(2x)$ 的 x 的取值范围是________.

(4) 方程 $(1-x)\sin \pi x=\frac{1}{2}(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的所有解之和等于________.

解题策略:(1)(2)是一组探求一些特殊方程根的个数或根的关系的填空题,我们讲特殊是指方程中包含不同领域的知识,用代数的方法是无法解的,只有通过转化为不同函数的图像交点问题获得结果,这就是运用数形结合的方法讨论方程根的个数以及根与根之间的关系.难点是如何把方程问题转化为函数问题(有时转化的方法不唯一),关键点是在定义域范围内较为精确地画出函数的图像.(3)借助于函数图像与性质使问题转化为解一般的不等式组,这里函数图像起到关键作用.(4)转化为 $2\sin \pi x=\dfrac{1}{1-x}$,画出 $y=2\sin \pi x$,$y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图像,探求交点的特征.

解:(1) $x^{\frac{1}{2}}=3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

设 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$,画出两函数的草图.从图上直观地看到有五个交点(如图 2-1).所以该方程解的个数是 5.

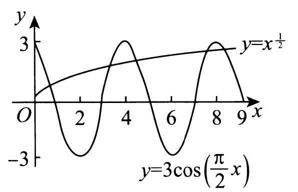


图 2-1

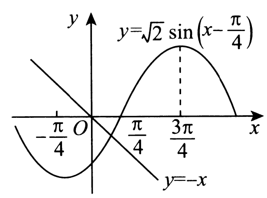


图 2-2

(2) 方程变形为 $-x=\sin x-\cos x$,即 $-x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

设 $y=-x$ 和 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,画出两函数的草图(如图 2-2),显然可得该方程实根的个数是 1.

(3) 由函数 $f(x)$ 的图像(如图 2-3)可知满足 $f(1-x^2)>f(2x)$ 分两种情况:

① $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ 1-x^2>2x\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}-1$,② $\begin{cases}1-x^2>0\\ x<0\end{cases}\Rightarrow -1<x<0$,

综上可知:$-1<x<\sqrt{2}-1$.

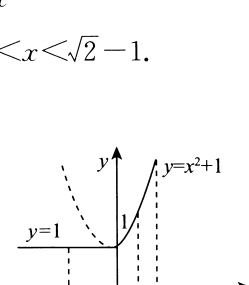


图 2-3

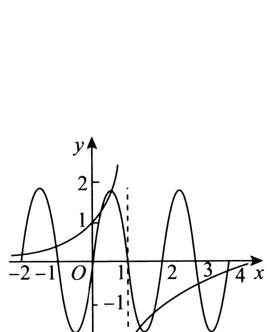


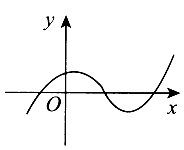
图 2-4

(4) 由题易得 $x\neq 1$,原方程可等价转化为 $2\sin\pi x=\dfrac{1}{1-x}$. 在同一平面直角坐标系中作出这两个函数 $y=2\sin\pi x$, $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图像(如图 2-4). 这两个函数图像共有 8 个公共点,且两两关于点(1,0)对称,故原不等式的所有解之和为 $x_1+x_2+\cdots+x_8=4\times 2=8$.

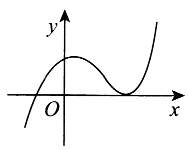
例 2 (1) 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$. 若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根,则实数 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

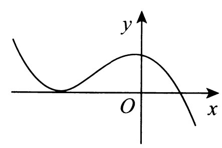
(2) 函数 $y=2^x-x^2$ 的图像大致是(　　).



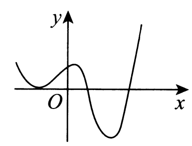
A.



B.



C.



D.

(3) 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点,则 b 的取值范围是(　　).

A. $[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$　　B. $[1-\sqrt{2},3]$

C. $[-1,1+2\sqrt{2}]$　　D. $[1-2\sqrt{2},3]$

解题策略:(1) 利用图像结合函数 $g(x)=kx$ 的动态过程求解;(2) 通过对函数性质的分析把问题转化为函数 $y=2^x$ 与 $y=x^2$ 有几个交点问题;(3) 考查直线与曲线有公共点的处理方法,体现数形结合思想方法的技巧性.

解:(1) 方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根,等价于函数 $f(x)=|x-2|+1$ 与 $g(x)=kx$ 的图像有两个不同的交点,在同一坐标系内分别作出其图像,如图 2-5 所示,当直线 $g(x)=kx$ 介于直线 $y=x$, $y=\dfrac{1}{2}x$ 之间时符合题意,k 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,故选 B.

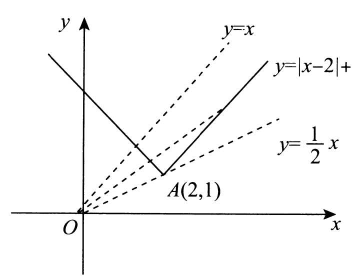


图 2-5

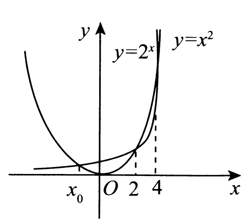


图 2-6

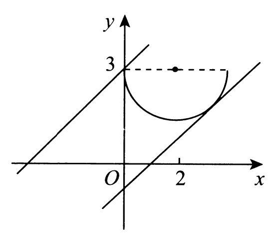


图 2-7

(2) 如图 2-6 所示,画出函数 $y=2^x$ 与 $y=x^2$ 的图像,显见有 3 个交点,说明函数 $y=2^x-$

x^2 的零点有 3 个，故排除 B、C，当 $x<x_0$ 时，有 $x^2>2^x$ 成立. 即 $y<0$，排除 D，故选 A.

(3) $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 变形为 $(x-2)^2+(y-3)^2=4(0\leqslant x\leqslant 4,1\leqslant y\leqslant 3)$，表示以 $(2,3)$ 为圆心，2 为半径的下半圆，如图 2－7 所示.

若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点，只需直线 $y=x+b$ 在图中两直线之间（包括图中两条直线），当 $y=x+b$ 与下半圆相切时，圆心到直线 $y=x+b$ 的距离为 2，即 $\dfrac{|2-3+b|}{\sqrt{2}}=2$，解得 $b=1-2\sqrt{2}$ 或 $b=1+2\sqrt{2}$（舍去），所以 b 的取值范围为 $1-2\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 3$，故选 D.

例 3 关于 x 的二次方程 $x^2+2kx+3k=0$，分别就下列情形，求实数 k 的取值范围.

(1) 一个根小于 -1，另一个根大于 3；

(2) 两个根均在 -1 和 3 之间.

解题策略： 本例由已知方程根的范围，探究参数的取值范围. 从解方程角度考虑免不了较为复杂的运算，所以求解含参数方程的一个有效手段是借助图形，把方程问题转化为函数问题，通过函数图像的“走向”寻求解题思路，依据图像简化运算，这种运算比直接解显然要容易.

解： 构造函数 $f(x)=x^2+2kx+3k$，其图像为开口向上的抛物线（如图 2－8）.

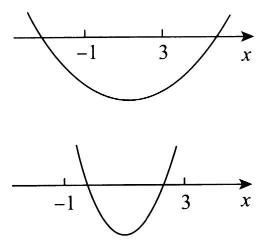


图 2－8

(1) 由图像可见，只要 $\begin{cases} f(-1)<0, \\ f(3)<0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} 1-2k+3k<0, \\ 9+6k+3k<0. \end{cases}$

所以 $k<-1$.

(2) $\begin{cases} \Delta\geqslant 0, \\ -1<-k<3, \\ f(-1)>0, \\ f(3)>0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} k\geqslant 3 \text{ 或 } k\leqslant 0, \\ -3<k<1, \\ k>-1, \\ k>-1. \end{cases}$ 所以 $-1<k\leqslant 0$.

第二节　数形转化和知识板块之间的转化相交融

例 1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}$ 的最大值.

解题策略： 本例给出的函数解析式较为复杂（既含偶次根式，又是分式），若拘泥于代数方法解必然产生心理障碍，所以分析习题必须深入一步、有意识地从数和形两个方面进行感知活动，促使数与形之间的转化. 可以借助三角换元法发现所给函数的几何意义. 可以是定点与动点之间的斜率，即运用直线与半圆的位置关系（相切）求得 y 的最大值，当然数与形的转化方法也不是唯一的，读者可以从不同的角度想一想、试一试.

解：$y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}$，由定义知 $1-x^2\geqslant 0$ 且 $2+x\neq 0$，

所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故可设 $x=\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$.

则有 $y=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$，可看作是动点 $M(\cos\theta,\sin\theta)$，$(\theta\in[0,\pi])$ 与定点 $A(-2,0)$ 连线的斜率. 而动点 M 的轨迹方程 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}\theta\in[0,\pi]$，即 $x^2+y^2=1(y\in[0,1])$ 是半圆(如图 2－9).

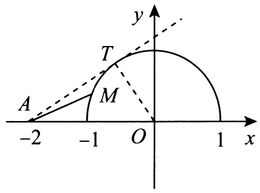


图 2－9

设切线为 AT，T 为切点，$|OT|=1$，$|AO|=2$，所以 $k_{AT}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $0\leqslant k_{AM}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

即函数的值域为 $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\boxed{\text{例 2}}$ 关于 x 的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中，z_1、z_2、m 都是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$，设这个方程的两个根 α、β 满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求 $|m|$ 的最大值和最小值.

解题策略：求复数问题可以转化为向量的运算来解，也可以转化为复数方程的几何意义来解，这就是代数问题几何化的解题策略，它的优点是直观，避免了繁杂冗长的计算与推理. 本例中根据 α、β 是关于 x 的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 两根的条件，结合 z_1 与 z_2 的关系，把 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$ 转化为关于 m 的方程，利用方程的几何意义求 $|m|$ 的最大值与最小值，解法既直观又简捷.

解：由韦达定理得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-z_1,\\\alpha\beta=z_2+m,\end{cases}$ 则 $|\alpha-\beta|^2=|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta|=|z_1^2-4z_2-4m|=|4m-(z_1^2-4z_2)|=28$.

因为 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$，

所以 $|4m-(16+20\mathrm{i})|=28$，$|m-(4+5\mathrm{i})|=7$.

如图 2－10 所示，复数 m 的对应点 M 在以 $(4,5)$ 为圆心，7 为半径的圆上.

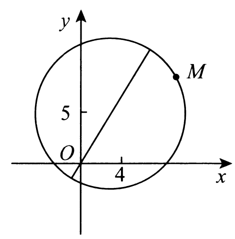


图 2－10

所以 $|m|_{\max}=7+\sqrt{41}$，$|m|_{\min}=7-\sqrt{41}$.

第三节 以数辅形三大法宝(代数法、解析法、向量法)

$\boxed{\text{例 1}}$ 设线段 AB 两端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，M 为线段 AB 的中点，$|AB|=a$(a 为大于零的常数). 求 M 到 y 轴的最短距离.

解题策略:本例解题时易走入如下误区:如图 2-11 所示,设 F 为抛物线的焦点,分别过 A、B、M 向抛物线的准线引垂线,垂足分别为 A_1、B_1、M_1. 则由 $|AF|+|BF|\geqslant|AB|$,结合抛物线的定义及梯形中位线的性质,得 $|MM_1|\geqslant\frac{1}{2}|AB|$. 所以 $|MM_1|$ 的最小值为 $\frac{a}{2}$,从而 M 到 y 轴的最短距离为 $\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$.

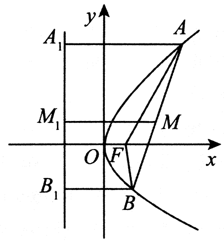


图 2-11

上述解法是错误的. 所给的图形并不能反映问题的本质. 这是因为,过抛物线焦点的最短弦是抛物线的通径. 只有在 $a\geqslant1$ 时,才符合以上的解法. 而当 $0<a<1$ 时,结合图形已无法判断,需要方程知识来解决,可见,图形并不一定能彻底解决问题,必须辅以代数运算.

解:设 $l_{AB}:x=my+n$,与 $y^2=x$ 联立,得 $y^2-my-n=0$

当 $\Delta=m^2+4n>0$ 时,$y_1+y_2=m$,所以 $x_1+x_2=(my_1+n)+(my_2+n)=m^2+2n$.

设 M 到 y 轴的距离为 d,则 $d=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m^2}{2}+n$.

又因为 $|AB|=a$,所以 $(m^2+1)(m^2+4n)=a^2$,得 $n=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{m^2+1}-m^2\right)$.

所以 $d=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{m^2+1}+m^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{m^2+1}+m^2+1-1\right)$,设 $t=m^2+1\geqslant1$,

则 $d=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{t}+t-1\right)$. 当 $0<a<1$ 时,得 $d=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{t}+t-1\right)$ 在 $t\in[1,+\infty)$ 上是增函数,所以当 $t=1$ 时,$d_{\min}=\frac{a^2}{4}$.

故当 $0<a<1$ 时,点 M 到 y 轴的最短距离为 $\frac{a^2}{4}$;当 $a\geqslant1$ 时,点 M 到 y 轴的最短距离为 $\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$.

例 2 如图 2-12 所示,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\perp AD$,$AB\perp BC$,$\angle BAC=45°$,$PA=AD=2$,$AC=1$.

(1) 证明 $PC\perp AD$;

(2) 求二面角 A-PC-D 的正弦值;

(3) 设 E 为棱 PA 上的点,满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30°,求 AE 的长.

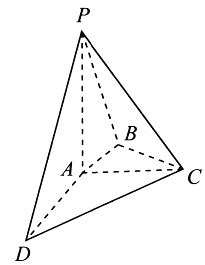


图 2-12

解题策略:本例主要考查空间中两条直线的位置关系、二面角、异面直线所成的角、空间两点间的距离,可以用"几何法"求解也可以用"向量法"求解."几何法"在于由"形"出发,观察"数"的特征,发现平行、垂直等几何关系中的数量关系,经历"作—证—求"的思维转化过程,体会"几何法"中所蕴含的数形结合思想."向量法"也由"形"出发,把相关的点、线"坐标化""向量化",空间图形"向量化"归根结底就是点、线段"向量化",体会"向量法"中所蕴含的数形结合思想. 实践证明,通过建立坐标系,将几何对象坐标化,进一步利用向量运算的几何意义,是解决空间几何体中求距离、夹角的好方法.

解:(1) 如图 2 - 13 所示,以$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AP}$为 x、y、z 正半轴方向,建立空间直角坐标系 $A-xyz$,则 $D(2,0,0)$、$C(0,1,0)$、$B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$、$P(0,0,2)$.

$\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$,因为$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,所以 $PC\perp AD$.

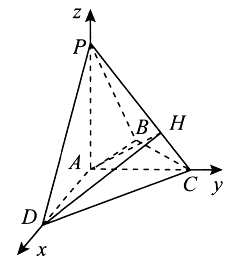


图 2 - 13

(2) 如图 2 - 13 所示,作 $AH\perp PC$,垂足为 H,联结 DH. 由(1)知,$PC\perp$平面 ADH,$\angle AHD$ 即为二面角 $A-PC-D$ 的平面角,记为 θ. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中,求得 $PC=\sqrt{5}$,$AH=\frac{2}{\sqrt{5}}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle DAH$ 中,求得 $DH=\sqrt{\frac{24}{5}}$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(3) 设 $E(0,0,h)$,则$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},h\right)$,$\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$,

$$|\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD}\rangle|=\cos 30^\circ=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{1}{2}+h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\text{解得 } h=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

故 AE 的长为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\boxed{\textbf{例 3}}$ 在直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(1,1)$、$B(2,3)$、$C(3,2)$,点 $P(x,y)$在$\triangle ABC$ 三边围成的区域(含边界)上.

(1) 若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$,求$|\overrightarrow{OP}|$;

(2) 设$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$,用 x、y 表示 $m-n$,并求 $m-n$ 的最大值.

解题策略:平面向量是数形结合体现得最为完美的数学知识之一,第(2)问先由向量的坐标运算,将问题转化为线性规划问题,通过对图形的分析可得到多种以形助教、以数辅形的解法.

解:(1) 因为$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$,且$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)+(2-x,3-y)+(3-x,2-y)=(6-3x,6-3y)$. 所以$\begin{cases}6-3x=0,\\6-3y=0.\end{cases}$解得 $x=2$,$y=2$. 即$\overrightarrow{OP}=(2,2)$. 故$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$.

(2) 因为$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,

所以$(x,y)=(m+2n,2m+n)$,所以$\begin{cases}x=m+2n,\\y=2m+n.\end{cases}$

两式相减得,$m-n=y-x$,

令 $y-x=t$,如图 2 - 14 所示,由图知,当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$时,t 取得最大值 1. 故 $m-n$ 的最大值为 1.

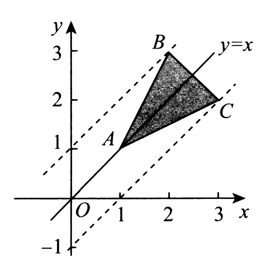


图 2 - 14

第四节 以形助数的两大抓手(利用函数图像思想、利用几何意义思想)

例 1 (1) 求 $y=\dfrac{2+5\sin x}{3-\sin x}$ 的最大值、最小值；

(2) 已知 $x^2+y^2\leqslant 4$，且 $x\geqslant 0$，求 $\dfrac{y+4}{x+1}$ 的最大值与最小值.

解题策略： 第(1)问，据 $y=\dfrac{2+5\sin x}{3-\sin x}$ 和 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 形式上的特点，构造动点 $A(\sin x,-5\sin x)$，定点 $B(3,2)$，则原问题求 y 的最值转化为求 k_{AB} 的最值. 这就是通常所说的"图形的构造"，是数形结合思想的抓手之一.

第(2)问，$x^2+y^2\leqslant 4(x\geqslant 0)$ 表示半圆域，$\dfrac{y+4}{x+1}$ 表示半圆域上的动点 $P(x,y)$ 与定点 $A(-1,-4)$ 连线的斜率. 问题迎刃而解.

解： (1) 据斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 构造两个点，即 $A(\sin x,-5\sin x)$、$B(3,2)$.

把点 $A(\sin x,-5\sin x)$ 视为直角坐标平面 aOb 内的一个动点，这时 $\begin{cases}a=\sin x,\\ b=-5\sin x\end{cases}$，由此可得 $b=-5a(-1\leqslant a\leqslant 1)$.

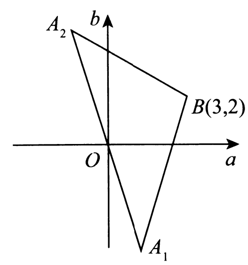


图 2-15

如图 2-15 所示，$b=-5a(-1\leqslant a\leqslant 1)$ 的图像是线段 A_1A_2，端点 A_1、A_2 的坐标分别是 $(1,-5)$、$(-1,5)$，点 A 在线段 A_1A_2 上移动. 直线 A_1B 的斜率为 $k_{A_1B}=\dfrac{2+5}{3-1}=\dfrac{7}{2}$，直线 A_2B 的斜率为 $k_{A_2B}=\dfrac{2-5}{3+1}=-\dfrac{3}{4}$.

y 即为直线 AB 的斜率.

所以 y 的最大值为 $k_{A_1B}=\dfrac{7}{2}$，最小值为 $k_{A_2B}=-\dfrac{3}{4}$.

(2) 如图 2-16 所示，不等式 $x^2+y^2\leqslant 4(x\geqslant 0)$ 表示半圆域. 设 $\dfrac{y+4}{x+1}=k$. $\dfrac{y+4}{x+1}$ 表示半圆域上的点 (x,y) 与点 $(-1,-4)$ 连线的斜率，

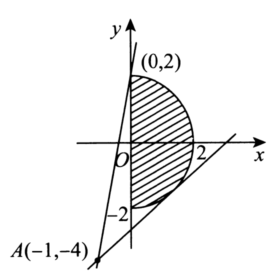


图 2-16

当直线过点 $(0,2)$ 时，有 $\left(\dfrac{y+4}{x+1}\right)_{\max}=6$.

当直线在切线位置时，k 值最小. 由点 $(0,0)$ 到切线的距离等于半径，得 $\dfrac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，且 $k>0$，所以 $\left(\dfrac{y+4}{x+1}\right)_{\min}=\dfrac{-4+2\sqrt{13}}{3}$.

例 2　(1) 若不等式 $\sqrt{9-x^2}\leqslant k(x+2)-\sqrt{2}$ 的解集为区间 $[a,b]$，且 $b-a=2$，则 $k=$________；

(2) 已知平面向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}(\vec{\alpha}\neq\vec{0},\vec{\alpha}\neq\vec{\beta})$ 满足 $|\vec{\beta}|=1$，且 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ 的夹角为 $120°$，则 $|\vec{\alpha}|$ 的取值范围是________.

解题策略：第(1)问，设 $y=\sqrt{9-x^2}(y\geqslant 0)$ 与 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$，显见直线 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$ 过点 $A(-2,-\sqrt{2})$ 且 $k>0$，借助图形容易得出结果. 第(2)问，易知 C 点在圆弧上运动且 $\angle ACB=60°$，在 $\triangle ABC$ 中结合正弦定理及正弦函数的有界性可得 $|\vec{\alpha}|$ 的取值范围.

解：(1) 如图 2-17 所示，设 $y=\sqrt{9-x^2}(y\geqslant 0)$ 与 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$. 直线 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$ 过点 $A(-2,-\sqrt{2})$. 不等式 $\sqrt{9-x^2}\leqslant k(x+2)-\sqrt{2}$ 的解集就是图中直线在半圆上方的部分所对应的 x 的集合，这个集合为 $[a,b]$，且 $b-a=2$，

故直线不可能是图中的 m，这由 $-2-(-3)\neq 2$ 所决定.

所以直线就是图中的 n.

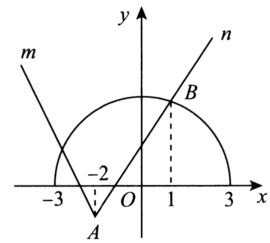


图 2-17

在 $y=\sqrt{9-x^2}$ 中，当 $x=1$ 时，$y=2\sqrt{2}$，所以点 B 的坐标为 $(1,2\sqrt{2})$. 把 $\begin{cases}x=1,\\y=2\sqrt{2}\end{cases}$ 代入 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$，得 $k=\sqrt{2}$.

(2) 如图 2-18 所示，数形结合知 $\vec{\beta}=\overrightarrow{AB},\vec{\alpha}=\overrightarrow{AC}$，$|AB|=1$，$C$ 点在圆弧上运动，$\angle ACB=60°$，设 $\angle ABC=\theta$，由正弦定理知 $\dfrac{AB}{\sin 60°}=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{\sin\theta}$.

所以 $|\vec{\alpha}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，当 $\theta=90°$ 时取最大值.

所以 $|\vec{\alpha}|=\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

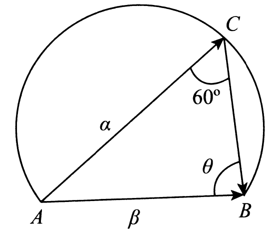


图 2-18

例 3　(1) 变量 x、y 满足 $\begin{cases}x-4y+3\leqslant 0,\\3x+5y-25\leqslant 0,\\x\geqslant 1.\end{cases}$

① 设 $z=4x-3y$，求 z 的最大值；② 设 $z=\dfrac{y}{x}$，求 z 的最小值；③设 $z=x^2+y^2$，求 z 的取值范围.

(2) 已知实数 x、y 同时满足下列条件：

$2x+y-2\geqslant 0$，$x-2y+4\geqslant 0$，$3x-y-3\leqslant 0$. 那么 x^2+y^2 在 x、y 为何值时取得最大值和最小值？最大值、最小值各是多少？

解题策略：挖掘代数式 $4x-3y$、$\dfrac{y}{x}$ 及 x^2+y^2 的几何意义，完成符号语言与图形语言的转化，以数思形，以形辅数，准确作出可行域是关键，体现了数形结合的思想方法.

解：(1) 可行域如图 2－19 阴影部分所示.

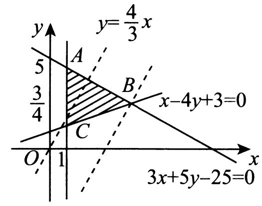


图 2－19

由$\begin{cases}x=1,\\3x+5y-25=0,\end{cases}$解得 $A\left(1,\dfrac{22}{5}\right)$.

由$\begin{cases}x=1,\\x-4y+3=0,\end{cases}$解得 $C(1,1)$.

由$\begin{cases}x-4y+3=0,\\3x+5y-25=0,\end{cases}$解得 $B(5,2)$.

① 由 $z=4x-3y$ 得 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{z}{3}$.

求 $z=4x-3y$ 的最大值，相当于求直线 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{z}{3}$ 的纵截距 $-\dfrac{z}{3}$ 的最小值，平移直线 $y=\dfrac{4}{3}x$ 知，当直线 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{z}{3}$ 过点 B 时，$-\dfrac{z}{3}$ 最小，z 最大.

所以 $z_{\max}=4\times5-3\times2=14$.

② 因为 $z=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$，所以 z 的值即是可行域中的点与原点 O 连线的斜率，观察图形可知 $z_{\min}=k_{OB}=\dfrac{2}{5}$.

③ $z=x^2+y^2$ 的几何意义是可行域上的点到原点 O 的距离的平方. 结合图形可知，可行域上的点到原点的距离中，$d_{\min}=|OC|=\sqrt{2}$，$d_{\max}=|OB|=\sqrt{29}$.

所以 $2\leqslant z\leqslant 29$.

(2) 由线性约束条件下确定可行域，设 $P(x,y)$，利用几何意义 $x^2+y^2=|OP|^2$，数形结合不难求出 x^2+y^2 的最大(小)值.

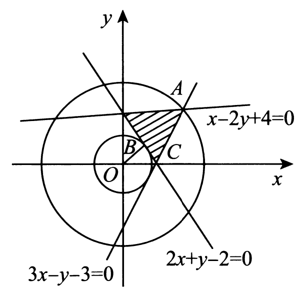


图 2－20

不等式组$\begin{cases}2x+y-2\geqslant0,\\x-2y+4\geqslant0,\\3x-y-3\leqslant0\end{cases}$表示的可行域如图 2－20 所示. 以原点为圆心作圆，显然，当圆过点 A 时，圆的半径最大；当圆与直线 $2x+y-2=0$ 相切时，圆的半径最小.

解方程组$\begin{cases}3x-y-3=0,\\x-2y+4=0,\end{cases}$得 A 点坐标为 $(2,3)$；易得原点到直线 $2x+y-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，并求得切点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，故当 $x=2,y=3$ 时，x^2+y^2 有最大值，并且最大值为 $|OA|^2=13$；当 $x=\dfrac{4}{5},y=\dfrac{2}{5}$ 时，x^2+y^2 取最小值，并且最小值为 $d^2=\dfrac{4}{5}$.

例 4 设函数 $f(x)=x\sin x(x\in\mathbf{R})$.

(1) 证明：$f(x+2k\pi)-f(x)=2k\pi\sin x$，其中 k 为整数；

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点，证明：$[f(x_0)]^2=\dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}$；

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，证明：$\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi(n=1,2,\cdots)$.

解题策略：第(1)问，利用三解函数的周期性证明；第(2)问，将方程根的问题转化为两函数图像的交点问题；第(3)问，满足 $f'(x)=0$ 的正根 x_0 都为 $f(x)$ 的极值点，然后再作差 $a_{n+1}-a_n$ 求范围.

证明：(1) 由函数 $f(x)$ 的定义，对任意整数 k，有 $f(x+2k\pi)-f(x)=(x+2k\pi)\sin(x+2k\pi)-x\sin x=(x+2k\pi)\sin x-x\sin x=2k\pi\sin x$.

(2) 函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上可导，$f'(x)=\sin x+x\cos x$，①

令 $f'(x)=0$，得 $\sin x+x\cos x=0$. 显然，对于满足上述方程的 x 有 $\cos x\neq 0$，上述方程化简为 $x=-\tan x$.

如图 2－21 所示，此方程一定有解.

$f(x)$ 取极值时的 x_0 一定满足 $\tan x_0=-x_0$.

且 $\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$，

因此，$[f(x_0)]^2=x_0^2\sin^2 x_0=x_0^2\cdot\dfrac{\tan^2 x_0}{1+\tan^2 x_0}=x_0^2\cdot\dfrac{x_0^2}{1+x_0^2}=\dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}$.

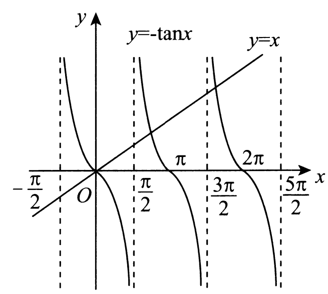


图 2－21

(3) 设 $x_0>0$ 是 $f'(x)=0$ 的任意正实根，即 $x_0=-\tan x_0$，则存在一个非负整数 k，使 $x_k\in\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right)$，即 x_0 在第二或第四象限内. 由①式，$f'(x)=\cos x\cdot(\tan x+x)$ 在第二象限或第四象限中的符号可列表如下：

x		$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,x_0\right)$	x_0	$(x_0,\pi+k\pi)$
$f'(x)$的符号	k 为奇数	$-$	0	$+$
	k 为偶数	$+$	0	$-$

所以满足 $f'(x)=0$ 的正根 x_0 都为 $f(x)$ 的极值点.

由题设条件，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为方程 $x=-\tan x$ 的全部正实根，且满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$，那么对于 $n=1,2,\cdots$，$a_{n+1}-a_n=-(\tan a_{n+1}-\tan a_n)=-(1+\tan a_{n+1}\cdot\tan a_n)\cdot\tan(a_{n+1}-a_n)$.　②

由于 $\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi<a_n<\pi+(n-1)\pi$，$\dfrac{\pi}{2}+n\pi<a_{n+1}<\pi+n\pi$，则 $\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\dfrac{3\pi}{2}$，

由于 $\tan a_{n+1}\cdot\tan a_n>0$，由②式知 $\tan(a_{n+1}-a_n)<0$.

由此可知 $a_{n+1}-a_n$ 必在第二象限，即 $a_{n+1}-a_n<\pi$.

综上所述，$\frac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi$.

第五节　动态过程中以形助数的应用

例1　关于 x 的方程 $\sqrt{4-x^2}=kx+2$ 只有一个实根，求 k 的取值范围.

解题策略：本例转化为两函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 和 $y=kx+2$ 的图像只有一个交点的问题. 由于函数 $y=kx+2$ 是过定点(0,2)且绕定点(0,2)转动的直线，与半圆有一个交点时斜率 k 的范围很直观.

解：设原题等价于 $y=\sqrt{4-x^2}$ 与 $y=kx+2$ 的图像只有一个交点时 k 的取值范围.

函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 即 $x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$，它的图像是以原点为圆心，2 为半径的上半圆，而 $y=kx+2$ 是过定点(0,2)且斜率 k 在变化的直线，也就是说直线绕(0,2)点转动. 因为(0,2)点在半圆上，所以动直线不可能与半圆再有其他交点(如图 2-22 所示).

所以 $k=0$ 或 $k>1$ 或 $k<-1$.

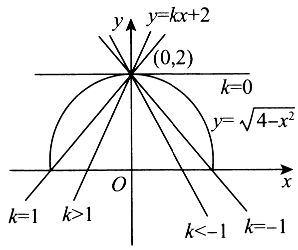


图 2-22

例2　椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，求点 P 横坐标的取值范围.

解题策略：当 $\angle F_1PF_2$ 为直角时，即作以原点为圆心，$|OF_2|$ 为半径的圆，若该圆与已知椭圆相交，则圆内的椭圆弧所对应的 x 的取值范围就是所求点 P 横坐标的取值范围.

解：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$、$F_2(\sqrt{5},0)$，以原点为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径作圆与椭圆相交于 A、B、C、D 四点，显然此时 $\angle F_1AF_2$、$\angle F_1BF_2$、$\angle F_1CF_2$、$\angle F_1DF_2$ 都为直角，显然当角的顶点 P 在圆内部的椭圆弧上时，$\angle F_1PF_2$ 为钝角. 由椭圆和圆都关于坐标轴对称，

所以只要通过方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ 求出 A、B 两点的横坐标. 即可得出点 P 横坐标的取值范围是 $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$(如图 2-23).

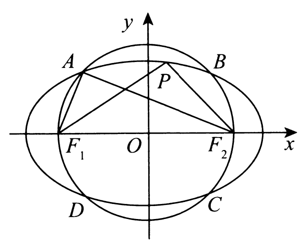


图 2-23

第六节　数形兼顾、相互补充

例1　已知 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，试比较实数 a、b、c 的大小关系.

解题策略：本例可转化为函数图像与不等式表示的区域，以形助数．然而光靠图形尚不能比较 a、b、c 的大小，还需要作差比较，即以数辅形．数形结合的思想方法的实质是将抽象的数学语言和直观图形结合起来，通过对图形的处理，发挥直观对抽象的支柱作用；通过对数与式的变换和运算，将图像的特征及几何关系刻画得更准确、更精细．这样就可以使抽象概念和具体形象相互联系、相互补充、相互转化、相互作用，求得问题的解决．

解：由 $a^2-2ab+c^2=0\Rightarrow b=\frac{1}{2a}c^2+\frac{a}{2}$，则点$(c,b)$是抛物线 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$上的点，由 $bc>a^2$，可知(c,b)是 $xy=a^2$ 上方的点，故满足 $\begin{cases}a^2-2ab+c^2=0,\\ bc>a^2\end{cases}$ 的点(c,b)应为阴影内的抛物线上除去(a,a)的点，所以 $c>a$，$b>a$．这就是数→形的结果（如图 2－24）．

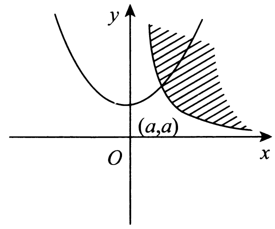


图 2－24

而 b、c 的大小关系要用代数的方法解决，

$$b-c=\frac{1}{2a}c^2+\frac{a}{2}-c=\frac{1}{2a}(c^2+a^2-2ac)=\frac{1}{2a}(c-a)^2>0,$$

所以 $b>c$，所以 $b>c>a$．

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b,x,y\in\mathbf{R}\}$，是否存在正整数 k 和 b 使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？若存在，求出 k 和 b 的值；若不存在，请说明理由．

解题策略：数形结合的思想简言之就是代数问题几何化、几何问题代数化，充分体现图形的直观性、代数推理的合理性．解题时注意不能用图形的直观代替严密的逻辑推理，本例的解题策略归结起来就是数形兼顾求参数值．

解：画出 $4x^2+2x-2y+5=0$ 和 $y^2=x+1$ 的图像，它们分别与 y 轴正半轴相交于点$\left(0,\frac{5}{2}\right)$和$(0,1)$（如图 2－25）．

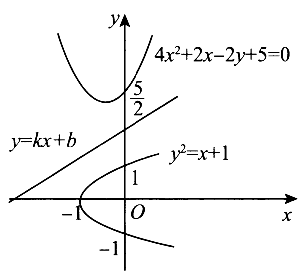


图 2－25

要使$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，就是要直线 $y=kx+b$ 与上述两条抛物线均无交点，这时 $b\in\left(1,\frac{5}{2}\right)$，因为 $b\in\mathbf{N}$，所以 $b=2$．

而且方程组（Ⅰ）$\begin{cases}y=kx+2, & ①\\ y^2=x+1, & ②\end{cases}$

（Ⅱ）$\begin{cases}y=kx+2, & ③\\ 4x^2+2x-2y+5=0, & ④\end{cases}$ 均无实数解．

把①代入②得　$k^2x^2+(4k-1)x+3=0$，

把③代入④得　$2x^2+(1-k)x+\frac{1}{2}=0$．

由$\begin{cases}\Delta_1=4k^2-8k+1<0,\\ \Delta_2=k^2-2k-3<0,\end{cases}$得$\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ -1<k<3,\\ k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 所以 $k=1$.

因此存在正整数 $k=1,b=2$ 满足$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

例 3 已知 $f(x)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上以 2 为周期的函数，对 $k\in\mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间$(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$.

(1) 求 $f(x)$在 I_k 上的解析式；

(2) 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a\mid$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数根$\}$.

解题策略：在求出 $x\in I_k$ 的函数解析式 $f(x)=(x-2k)^2$ 之后，把问题转化为求函数 $y_1=(x-2k)^2,x\in I_k,k\in\mathbf{N}$ 与 $y_2=ax$ 有两个交点时 a 即直线 $y=ax$ 的斜率 a 的取值范围.

解：(1) 因为 2 是 $f(x)$的周期，当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k$ 也是 $f(x)$的周期.

又因为当 $x\in I_k$ 时，$(x-2k)\in I_0$，所以 $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$，即对 $k\in\mathbf{Z}$，当 $x\in I_k$ 时，$f(x)=(x-2k)^2$.

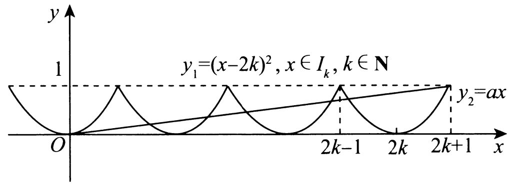


图 2-26

(2) 方程 $f(x)=ax$，即对$(x-2k)^2=ax$ 有两个不等实根. 令 $y_1=(x-2k)^2,x\in I_k,k\in\mathbf{N},y_2=ax$.

如图 2-26 所示，在同一坐标系中分别作出 y_1、y_2 的图像. y_2 的图像是过原点，斜率为 a 的直线，方程有两个不等实根的充要条件是两图像有两个不同交点. 由图像 2-26 可知，当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}(k\in\mathbf{N})$时两图像有两个不同交点.

从而，原方程有两个不等实根时 $M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\right\}$.

例 4 过抛物线 $x^2=2py(p>0)$的焦点作斜率为 1 的直线与该抛物线交于 A、B 两点. A、B 在 x 轴上的正射影分别为 C、D，若梯形 $ABDC$ 的面积为 $12\sqrt{2}$，则 $p=$________.

解题策略：本例是典型的圆锥曲线焦点弦问题，可以直接运用代数的方法解，即联立方程组与韦达定理结合，但是也可以数形结合，这是因为焦点弦问题必须考虑圆锥曲线的几何特征，借助几何法解题较为简单，可起到事半功倍的效果.

解：解法一：直线 AB 方程为 $y=x+\dfrac{p}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=x+\dfrac{p}{2},\\ x^2=2py,\end{cases}$得 $x^2-2px-p^2=0$，所以 $x_1+x_2=2p,x_1x_2=-p^2$.

故 $S=\dfrac{1}{2}|y_1+y_2||x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1^2}{2p}+\dfrac{x_2^2}{2p}\right)|x_1-x_2|$

$=\frac{1}{4p}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{2}p^2$，

因为 $S=12\sqrt{2}$，所以 $3\sqrt{2}p^2=12\sqrt{2}$，且 $p>0$，所以 $p=2$.

解法二：如图 2－27 所示. 由几何关系，设直线 AB 倾斜角为 θ，根据抛物线定义，$AF=p-AF\sin\theta$，所以 $AF=\frac{p}{1+\sin\theta}$，$BF=p+BF\sin\theta$，所以 $BF=\frac{p}{1-\sin\theta}$，

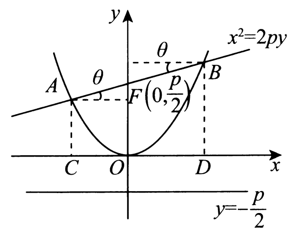


图 2－27

所以 $AB=AF+BF=\frac{2p}{\cos^2\theta}$.

又因为 $S=\frac{1}{2}(AC+BD)\cdot CD=\frac{1}{2}\left(AF-\frac{p}{2}+BF-\frac{p}{2}\right)\cdot AB\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}(AB-p)\cdot AB\cos\theta$，

且直线 AB 斜率为 1，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，将 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入，得 $S=\frac{1}{2}(4p-p)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2p}{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}p^2=12\sqrt{2}$. 又因为 $p>0$，所以 $p=2$.

例 5　（1）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0],\\ x, & x\in(0,1],\end{cases}$ 且 $g(x)=f(x)-mx-m$ 在 $(-1,1]$ 内有且仅有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $\left(-\frac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left(-\frac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C. $\left(-\frac{9}{4},-2\right)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　D. $\left(-\frac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$

（2）若方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$ 的解为 x_1，方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的解为 x_2，则 x_1x_2 的取值范围为________.

解题策略： 第(1)问，函数 $g(x)=f(x)-mx-m$ 的零点个数问题就是曲线 $y=f(x)$ 和动直线 $y=m(x+1)$ 的交点个数问题，需要画出函数图像，利用数形结合思想直观判断出交点个数. 而 $y=f(x)$ 是分段函数，要注意自变量的取值范围. 在函数的定义域内画图，再利用直线 $y=m(x+1)$ 过定点 $(-1,0)$，通过转动直线判断何时有两个交点，利用分界点处直线的斜率求解范围. 第(2)问，由函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 及 $y=\log_2 x$ 的图像确定 x_1、x_2 的取值范围. 进而求 x_1x_2 的取值范围.

解：（1）$g(x)=f(x)-mx-m$ 在 $(-1,1]$ 内有且仅有两个不同的零点就是函数 $y=f(x)$ 的图像与函

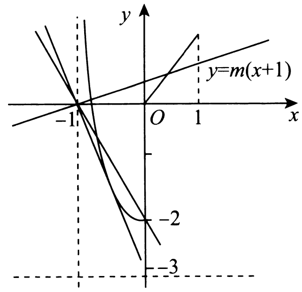


图 2－28

数 $y=m(x+1)$ 的图像有两个交点，在同一直角坐标系内作出函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0],\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$ 和函数 $y=m(x+1)$ 的图像，如图 2－28 所示. 当直线 $y=m(x+1)$ 与 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$，$x\in(-1,0]$ 和 $y=x$，$x\in(0,1]$ 都相交时 $0<m\leqslant\dfrac{1}{2}$；当直线 $y=m(x+1)$ 与 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$，$x\in(-1,0]$ 有两个交点时，由方程组 $\begin{cases}y=m(x+1),\\ y=\dfrac{1}{x+1}-3,\end{cases}$ 消元得 $\dfrac{1}{x+1}-3=m(x+1)$，即 $m(x+1)^2+3(x+1)-1=0$，化简得 $mx^2+(2m+3)x+m+2=0$，当 $\Delta=9+4m=0$，即 $m=-\dfrac{9}{4}$，直线 $y=m(x+1)$ 与 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$ 相切，当直线 $y=m(x+1)$ 过点 $(0,-2)$ 时，$m=-2$，所以 $m\in\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]$. 综上，实数 m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，故选 A.

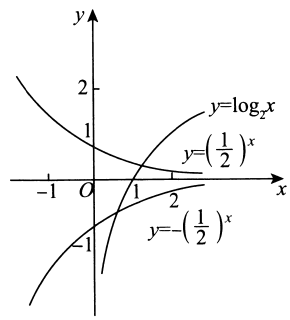


图 2－29

（2）由已知，得 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1}=\log_2x_1$，$-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2}=\log_2x_2$ 在同一坐标系中，画出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 及 $y=\log_2x$ 的图像，如图 2－29 所示，观察图像可知，$x_1>1$，$0<x_2<1$，所以 $0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1}<\dfrac{1}{2}$，$-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2}<-\dfrac{1}{2}$，即 $0<\log_2x_1<\dfrac{1}{2}$，$\log_2x_2<-\dfrac{1}{2}$，两式相加，得 $\log_2x_1+\log_2x_2<0$，所以 $\log_2(x_1x_2)<0$，即 $0<x_1x_2<1$.

第七节　数形结合的桥梁——构造法

例 1　已知 α、β、γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

求证：$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant3\sqrt{2}$.

解题策略：由于题设正是长方体的一个重要性质：若长方体的一条体对角线与从一端点出发的三条棱所成角为 α、β、γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以构造长方体，运用三角比的定义，结合基本不等式问题迎刃而解.

证明：由已知条件作长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，使 $\angle C_1AD=\alpha$，$\angle C_1AB=\beta$，$\angle C_1AA_1=\gamma$（如图 2－30）.

设 $AD=a$，$AB=b$，$AA_1=c$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}$，$\tan\gamma=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

由于 $x^2+y^2-\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}(x-y)^2\geqslant 0$，

所以 $x^2+y^2\geqslant\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$.

所以 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}(x、y\geqslant 0)$，从而有：

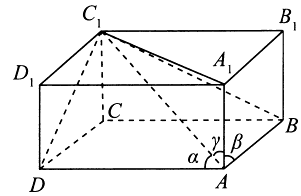


图 2-30

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geqslant\frac{b+c}{\sqrt{2}a}+\frac{c+a}{\sqrt{2}b}+\frac{a+b}{\sqrt{2}c}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(2+2+2)=3\sqrt{2}.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号，故 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

例 2　试求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}+\sqrt{x^4+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{16}}$ 的最小值.

解题策略：数形结合思想的核心是“以形助数，以数解形”使复杂问题简单化，抽象问题具体化，从而找到解题思路，使问题得到解决. 以形助数常用的有：借助于数轴、函数图像、单位圆、数式的结构特征、解析几何方法、向量知识. 以数解形常用的有：借助于几何轨迹所遵循的数量关系、运算结果与几何定理的结合. 本例粗看似乎无从着手，若能构造出抛物线方程，使问题转化为抛物线上动点到两个定点的距离之和，利用抛物线的定义，结合平面上两点距离的线段为最短则问题可顺畅解出. 正如宋朝诗人杨万里的诗句：“莫问早行奇绝处，四方八面野香来.”一旦掌握了数与形之间的辩证关系，就会消除解题过程中的心理障碍，不断提高心理素质和解题能力.

解：$f(x)=\sqrt{(x+1)^2+(x^2-2)^2}+\sqrt{x^2+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)^2}$，

构造动点 $P(x,x^2)$，则 P 的轨迹方程为 $y=x^2$，

设 $A(-1,2)$，$F\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，

则 F 正好为抛物线 $x^2=y$ 的焦点，

抛物线准线方程为 $l:y=-\dfrac{1}{4}$（如图 2-31），

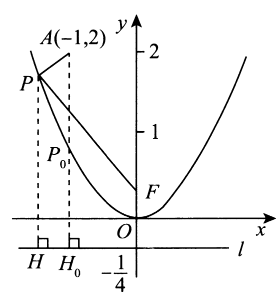


图 2-31

过点 P 作 $PH\perp l$ 于 H，过 A 作 $AH_0\perp l$ 于 H_0 交抛物线于 P_0.

故有 $f(x)=|PA|+|PF|=|PA|+|PH|\geqslant|AH_0|=2-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{4}$，

当且仅当 P 在 P_0 处时 $f(x)$ 取得最小值 $\dfrac{9}{4}$.

例 3　对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，若存在函数 $h(x)=kx+b$（k，b 为常数），对任给

的正数 m，存在相应的 $x_0\in D$，使得当 $x\in D$ 且 $x>x_0$ 时，总有 $\begin{cases}0<f(x)-h(x)<m,\\0<h(x)-g(x)<m,\end{cases}$ 则称直线 $l:y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的"分渐近线"，给出定义域均为 $D=\{x|x>1\}$ 的四组函数如下：

① $f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt{x}$；② $f(x)=10^{-x}+2$，$g(x)=\dfrac{2x-3}{x}$；

③ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，$g(x)\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}$；④ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$，$g(x)=2(x-1-\mathrm{e}^{-x})$.

其中，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 存在"分渐近线"的是(　　).

A. ①④　　B. ②③　　C. ②④　　D. ③④

解题策略：本例是新概念题，主要考查对新概念的理解以及函数的图像与性质. 直接运用新概念中的不等式组解，难度较大，借助于图像是解决问题的最好方法，同时考查学生思维能力及创新意识. 本例突出了数形结合的思想，在运用图像之前，对解析式应作些变形，使之朝基本函数靠近，从而使函数图像容易作出.

解：由题意知 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的渐近线，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像分别在渐近线的两侧.

由① $f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt{x}$ 的图像(如图 2－32)知，当 $x>1$ 时，两图像无渐近线，不合题意.

由② $f(x)=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x+2$，$g(x)=2-\dfrac{3}{x}$ 的图像(如图 2－33)知，

$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的渐近线 $h(x)=2$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别在渐近线两边，符合题意.

由③ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=x+\dfrac{1}{\ln x}$ 的图像(如图 2－34)知，

当 $x>1$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有共同的渐近线 $y=x$，但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在渐近线同侧(如图 2－34)，不合题意.

由④ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}=2|x+1|+\dfrac{2}{x+1}$，$g(x)=2\left(x-1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$ 的图像(如图 2－35)知，当

$x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\to0$，所以 $g(x)$ 的渐近线为 $y=2(x-1)$.

由图像知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有共同的渐近线 $h(x)=2(x-1)$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像分别在渐近线两侧，符合题意，故选 C.

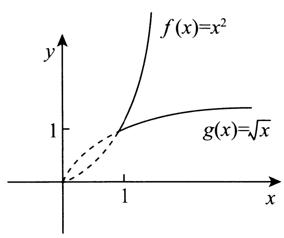


图 2－32

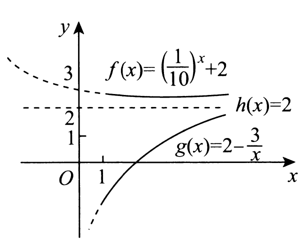


图 2－33

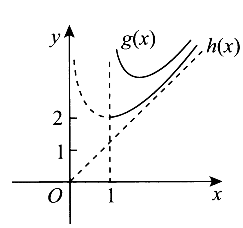


图 2－34

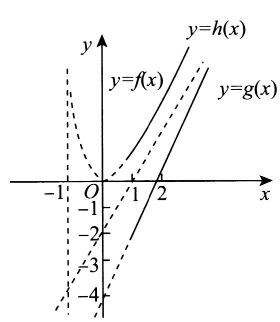


图 2－35

专题训练二:数形结合的思想

一、填空题

1. 设定义域为 **R** 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是________.

2. 已知方程 $|x^2-a|-x+3=0(a>0)$ 有两个不相等的实数根,则实数 a 的取值范围是________.

3. 已知方程 $\sqrt{x(4-x)}-ax-4=0$ 有两个不相等的实数根,则实数 a 的取值范围是________.

4. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则直线 l 的倾斜角的取值范围是________.

5. 方程 $x^2=2^x$ 的解的个数为________.

方程 $x^{\frac{1}{3}}=2\sin x$ 的解的个数为________.

6. 已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图像与函数 $y=kx$ 的图像恰有两个交点,则实数 k 的取值范围是________.

7. 设 a、k 是实数,且存在唯一的 $a\in[0,3)$ 使得 $a^2-4a+3+k=0$,则 k 的取值范围是________.

8. 已知曲线 $M:\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{30}$,$C$、$D$ 是其上的两点,则 $|\overrightarrow{CD}|$ 的最大值是________.

9. 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$,且方程 $f(x)+x-2=0$ 与 $f^{-1}(x)+x-2=0$ 的实数解分别为 α 与 β,则 $\alpha+\beta$ 的值为________.

10. 设 $a\in\mathbf{R}$,若 $a>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$,则 $a=$________.

11. 设 $x\in[0,2\pi]$,关于 x 的方程 $\sin x+2|\sin x|-k^2+k=0$ 有四个实根,则实数 k 的取值范围是________.

12. 函数 $y=\dfrac{3+\sin x}{4+2\cos x}$ 的最大值是________;最小值是________.

二、选择题

13. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F,过点 $M(\sqrt{3},0)$ 的直线与抛物线相交于 A、B 两点,与抛物线的准线相交于点 C,$|BF|=2$,则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$(　　).

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{4}{7}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

14. 不等式 $|x+3|-|x-1|\leqslant a^2-3a$ 对任何 x 恒成立,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$　　　B. $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

C. $[1,2]$　　　D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

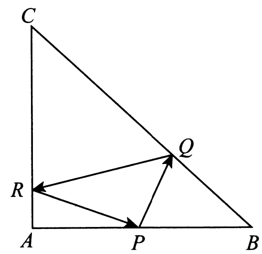
15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-6\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$ 若目标函数 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 的最大值为 12，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$ 的最小值为(　　).

A. $\dfrac{25}{6}$　　B. $\dfrac{8}{3}$　　C. $\dfrac{11}{3}$　　D. 4

16. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=AC=4$，点 P 在边 AB 上异于 A、B 的一点. 光线从点 P 出发，经 BC、CA 反射后又回到原点 P（如图所示）. 若光线 QR 经过$\triangle ABC$ 的重心，则 AP 等于(　　).

A. 2　　B. 1

C. $\dfrac{8}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

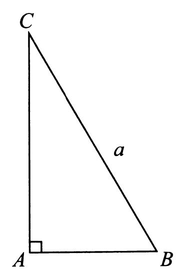


第 16 题图

三、解答题

17. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与抛物线 $y=x^2+m$ 有四个公共点，试探讨 a、b、m 应满足的关系.

18. 如图所示，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $BC=a$，若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点，问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的值最大？并求出这个最大值.



第 18 题图

19. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-2, x\leqslant -1,\\ (x-2)(|x|-1), x>-1.\end{cases}$

(1) 设 $f(x)\geqslant 2$,求 x 的取值范围;

(2) 设 $g(x)=f(x)-\lg a$,且方程 $g(x)=0$ 有四个不同的实根,求实数 a 的取值范围.

20. (1) 设非空集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y\mid y=2x+3$,且 $x\in A\}$,$C=\{z\mid z=x^2$,且 $x\in A\}$.若 $C\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

(2) 设 x、y、$z\in(0,1)$,求证:$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.