黑卷·理科数学

参考答案及评分标准

一、选择题(共60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	D	D	C	D	C	B	A	D	A

评分标准

第1~12题,每小题5分,与答案不符的均不给分。

二、填空题(共20分)

13. $\frac{2\pi}{3}$ **14.** $\frac{23}{28}$ **15.** 18 **16.** 6;$\frac{5}{17}$

第13~15题,每小题5分,与答案不符的均不给分。第16题,第一空2分,第二空3分,与答案不符的均不给分。

三、解答题(共70分)

(一)必考题(60分)

17. 解:选择条件①,(结构不良题需先标明所选择的条件然后再求解)

(1)因为 $\boldsymbol{m}=\left(\sin A,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\boldsymbol{n}=(2\cos 2A,2\cos A)$,且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,

所以 $\sin A\cdot 2\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\cos 2A=0$,

即 $\sin 2A=-\sqrt{3}\cos 2A$,所以 $\tan 2A=-\sqrt{3}$,(3分)

正确利用二倍角公式求解 $\tan 2A$ 得3分。

由△ABC 为锐角三角形可知 $0<A<\frac{\pi}{2}$,则 $0<2A<\pi$,

故 $2A=\frac{2\pi}{3}$,$A=\frac{\pi}{3}$.(6分)

正确求解角 A 得3分。

(2)因为 $a=2$,由(1)可得 $A=\frac{\pi}{3}$,

所以根据余弦定理可得 $4=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$,当且仅当 $b=c=2$ 时,等号成立.(9分)(忽略判断等号成立的条件会导致失分)

正确利用余弦定理及基本不等式求解 bc 的最大值得3分。

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

故△ABC 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.(12分)

正确求解△ABC 面积的最大值得3分。

选择条件②,(1)因为 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$,由正弦定理可得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$,(2分)

正确利用正弦定理将边化为角得2分。

由△ABC 为锐角三角形可知 $0<B<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin B\neq 0$,

则 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,即 $\tan A=\sqrt{3}$,(4分)

正确利用同角三角函数关系求解 $\tan A$ 得2分。

由△ABC 为锐角三角形可知 $0<A<\frac{\pi}{2}$,故 $A=\frac{\pi}{3}$.(6分)

正确求解角 A 得2分。

(2)后同选择条件①.

选择条件③,(1)因为 $\cos^2 B+\cos^2 C=\cos^2 A+1-\sin B\sin C$,

所以 $1-\sin^2 B+1-\sin^2 C=1-\sin^2 A+1-\sin B\sin C$,(2分)

即 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$,

正确利用同角三角函数关系将余弦转化为正弦得2分。

由正弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=bc$,(4 分)

正确利用正弦定理将角转化为边得 2 分。

根据余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

由△ABC 为锐角三角形可知 $0<A<\frac{\pi}{2}$,故 $A=\frac{\pi}{3}$.(6 分)

正确求解角 A 得 2 分。

(2)后同选择条件①.

18. 解:(1)取 AC 中点为 D,连接 SD,BD.

因为 $SA=SC$,D 为 AC 中点,所以 $SD\perp AC$.

又侧面 $SAC\perp$底面 ABC,侧面 $SAC\cap$底面 $ABC=AC$,$SD\subset$侧面 SAC,所以 $SD\perp$底面 ABC,$SD\perp BD$.(2 分)

正确利用线面垂直的性质定理证得线线垂直得 2 分。

由于 $SB=2\sqrt{5}$.$BD=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

则 $SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=2\sqrt{2}$,$SC=SA=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+SD^2}=2\sqrt{3}$,

由于 $\frac{SE}{EB}=\frac{2}{3}$,则 $SE=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,$EB=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,

因为 $SC^2-SE^2=BC^2-EB^2=\frac{44}{5}$,所以 $CE\perp SB$.(4 分)

正确利用勾股定理证明线线垂直得 2 分。

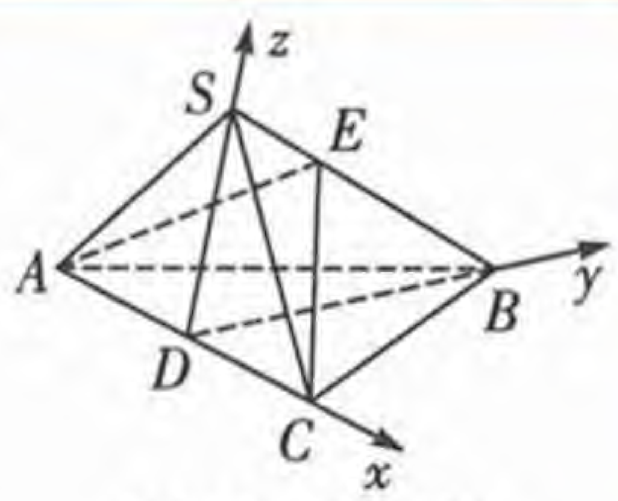
又 $SD\perp AC$,$BD\perp AC$,$SD\cap BD=D$,(证明线面垂直时需指明线线相交)

所以 $AC\perp$平面 SBD,$AC\perp SB$.

又 $AC\cap CE=C$,所以 $SB\perp$平面 ACE.(6 分)

正确利用线面垂直的判定定理进行证明得 2 分。

(2)由(1)可得 DC,DB,DS 两两垂直,故以 D 为坐标原点,DC,DB,DS 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,



第 18 题解图

则 $S(0,0,2\sqrt{2})$,$A(-2,0,0)$,$C(2,0,0)$,$B(0,2\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{SB}=(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{SA}=(-2,0,-2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{SC}=(2,0,-2\sqrt{2})$,(8 分)

正确求解向量坐标得 2 分。

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_1-2\sqrt{2}z_1=0,\\ -2x_1-2\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=\sqrt{3}$,则 $y_1=\sqrt{2}$,$x_1=-\sqrt{6}$,即 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{6},\sqrt{2},\sqrt{3})$,

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{2}z_2=0,\\ 2x_2-2\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=\sqrt{3}$,则 $y_2=\sqrt{2}$,$x_2=\sqrt{6}$,即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{6},\sqrt{2},\sqrt{3})$,(10 分)

正确求解平面 SAB,SBC 的一个法向量得 2 分。

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{-6+2+3}{\sqrt{(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}}$

$=-\frac{1}{11}$,(11 分)

正确利用向量的数量积公式求解两法向量夹角的余弦值得 1 分。

设二面角 $A-SB-C$ 的平面角为 θ,

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{11}\right)^2}=\frac{2\sqrt{30}}{11}$,

故二面角 $A-SB-C$ 的正弦值为$\frac{2\sqrt{30}}{11}$.(12 分)

回归设问得 1 分。

19. **解**:(1)由题意得,任取三种幼苗各一株,至少有两株幼苗成活,包括恰有两株幼苗成活,三株幼苗均成活两种情况,

故概率为$[(1-0.8)\times p^2+2\times0.8\times p(1-p)]+0.8\times p^2\leqslant0.896$,

即 $3p^2-8p+4.48\geqslant0$,

解得 $p\leqslant\frac{4}{5}$或 $p\geqslant\frac{28}{15}$(舍去),(2 分)

正确求解幼苗成活概率的范围得 2 分。

又 $p>0$,故 p 的取值范围为$\left(0,\frac{4}{5}\right]$,故 p 的最大值为 0.8,(4 分)

正确利用题意求解概率最值得 2 分。

记红柳和梭梭树幼苗均成活为事件 A,经济作物幼苗成活为事件 B,

则有 $P(A)=0.8\times0.8=0.64$,$P(B|A)=0.88$.

故所求概率为 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.64\times0.88=0.5632$.(6 分)

正确利用条件概率公式求解概率得 2 分。

(2)(ⅰ)设正常情况下,任意抽取一株梭梭树,树杆地径为 X mm,

由题意可知 $X\sim N(250,5^2)$,因为 $235=250-3\times5$,

所以由正态分布的对称性及“3σ”原则可知:

$P(X<235)=\frac{1}{2}\times(1-P(235\leqslant X\leqslant265))\approx\frac{1}{2}\times0.0027\approx0.001$.(9 分)

正确利用正态分布求解树杆地径小于235 mm 的概率得 3 分。

(ⅱ)理由①:农林管理员的判断是合理的.

如果该地块土质对梭梭树的生长没有影响,由(ⅰ)可知,随机抽取 10 棵梭梭树,树杆地径都小于 235 mm 的概率约为 0.001^{10},为极小概率事件,几乎不可能发生,但这样的事件竟然发生了,所以有理由认为该地块对梭梭树的生长产生影响,即农林管理员的判断是合理的.(12 分)

根据题意正确给出合理看法得 3 分。

理由②:农林管理员的判断是不合理的.

由于是随机抽取了 10 棵梭梭树,所以不可控因素比较多,例如有可能这 10 颗树的幼苗栽培深度较浅,也有可能是自幼苗栽种后的浇水量或浇水频率不当所致.(答案不唯一,言之有理即可)(12 分)

20. **解**:(1)设 $M(x_0,y_0)$,则有$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

即$\frac{y_0^2}{b^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{a^2-x_0^2}{a^2}$,则$\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,

又 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,

则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{3}{4}$，(3 分)

→ 正确利用点 M 在椭圆上、两点间斜率公式得到关于两直线斜率之积的式子得 3 分。

即 $-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$，则 $3a^2=4(a^2-c^2)$，解得 $a^2=4c^2$，

故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. (4 分)

→ 正确求解离心率得 1 分。

(2) 由左焦点 F_1 到椭圆上的点的最大距离为 3 可知 $a+c=3$，

又 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $c=1$，$a=2$，则 $b^2=3$，

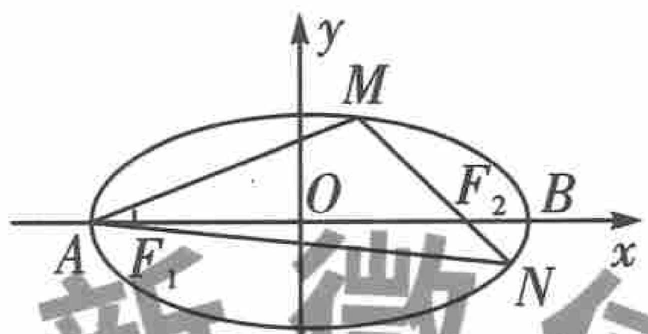
故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (5 分)

→ 正确求解椭圆 C 的方程得 1 分。

则 $F_2(1,0)$，设 MN：$x=my+1$，$N(x_1,y_1)$，

设点 M 位于 x 轴上方，点 N 位于 x 轴下方，则 $y_0>0$，$y_1<0$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，$\Delta=144(m^2+1)>0$，



第 20 题解图

则 $y_0+y_1=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_0y_1=\frac{-9}{3m^2+4}$，(7 分)

→ 正确求解 y_0，y_1 间的关系得 2 分。

因为 $S_{\triangle AMF_2}=2S_{\triangle ANF_2}$，所以 $y_0=-2y_1$，(8 分)（$\triangle AMF_2$，$\triangle ANF_2$ 底相同可知面积之比即为高之比，又 y_0，y_1 异号，故 $y_0=-2y_1$，解题时往往忽略这一细节而致错）

代入 $y_0+y_1=\frac{-6m}{3m^2+4}$ 可知 $y_1=\frac{6m}{3m^2+4}$，则 $y_0=-2y_1=\frac{-12m}{3m^2+4}$，

又 $y_0y_1=\frac{-9}{3m^2+4}$，即 $\frac{-12m}{3m^2+4}\cdot\frac{6m}{3m^2+4}=\frac{-9}{3m^2+4}$，

结合椭圆对称性得 $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，(11 分)

→ 正确利用 M，N 纵坐标间的关系求解 m 得 3 分。

故直线 MN 的方程为 $\sqrt{5}x+2y-\sqrt{5}=0$ 或 $\sqrt{5}x-2y-\sqrt{5}=0$. (12 分)

21. 解：(1) 因为 $f(x)=a\ln x-x^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，（忽略函数定义域将造成失分）

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-2x=\frac{-2x^2+a}{x}$，(1 分)

→ 正确求导得 1 分。

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{2a}}{2}$，

当 $0<x<\frac{\sqrt{2a}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x>\frac{\sqrt{2a}}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. (3 分)

→ 正确判断函数单调性得 2 分。

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

→ 未进行综述扣 1 分。

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)$ 内单调递增，在

$\left(\frac{\sqrt{2a}}{2},+\infty\right)$上单调递减.(4分)

(2)因为$g(x)=f(x)+(2-a)x=a\ln x-x^2+(2-a)x,x\in(0,+\infty)$,

①当$a=0$时,$g(x)=-x^2+2x$在$(0,+\infty)$上只有一个零点2,不符合题意;(5分)

正确求解$a=0$时函数$g(x)$的零点个数得1分。

②当$a\neq0$时,求导得$g'(x)=\frac{a}{x}-2x+2-a=\frac{-2x^2+(2-a)x+a}{x}=\frac{-(x-1)(2x+a)}{x}$,令$g'(x)=0$,解得$x=1$或$x=-\frac{a}{2}$,

(ⅰ)当$a>0$时,$-\frac{a}{2}<0$,当$0<x<1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x>1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,则$g(x)_{\max}=g(1)=1-a$,

要使函数$g(x)$有两个零点,必有$1-a>0$,即$a<1$,(7分)

正确利用函数$g(x)$有两个零点结合最值求得a的范围得2分。

且$g(2)=a\ln 2-4+4-2a=a(\ln 2-2)<0$,则函数$g(x)$在区间$(1,2)$内存在一个零点;

又因为$g\left(\frac{a}{4}\right)=a\ln\frac{a}{4}-\left(\frac{a}{4}\right)^2+(2-a)\times\frac{a}{4}=a\left(\ln\frac{a}{4}-\frac{5}{16}a+\frac{1}{2}\right)=a\left(\ln\frac{a}{4}-\frac{5}{16}a+\ln\sqrt{e}\right)=a\left(\ln\frac{a\sqrt{e}}{4}-\frac{5}{16}a\right)$,

因为$0<a<1$,则$-\frac{5}{16}a<0$,又$1<\sqrt{e}<2$,

则$0<a\sqrt{e}<2$,$\ln\frac{a\sqrt{e}}{4}<\ln 1=0$,故$a\left(\ln\frac{a\sqrt{e}}{4}-\frac{5}{16}a\right)<0$,

所以函数$g(x)$在区间$\left(\frac{a}{4},1\right)$内存在一个零点,

故当$0<a<1$时,函数$g(x)$有两个零点;(8分)

正确判断$a>0$时函数$g(x)$的零点个数得1分。

(ⅱ)当$a<0$时,函数$g(x)$有两个极值点$x=1$和$x=-\frac{a}{2}$,

因为$g(1)=1-a>0$,$g\left(-\frac{a}{2}\right)=a\ln\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{4}-a=a\left[\ln\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{4}-1\right]$,

令$m(x)=\ln\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{4}-1(x<0)$,则$m'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}=\frac{x+4}{4x}$,

当$x<-4$时,$m'(x)>0$;当$-4<x<0$时,$m'(x)<0$,

所以函数$m(x)$在$(-\infty,-4)$上单调递增,在区间$(-4,0)$内单调递减,

所以$m(x)_{\max}=m(-4)=\ln 2-2<0$,

所以当$a<0$时,$\ln\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{4}-1<0$,$g\left(-\frac{a}{2}\right)>0$,

则当$a<0$时,函数$g(x)$的两个极值均大于零,且当$x\to0$,$g(x)\to+\infty$,$x\to+\infty$,$g(x)\to-\infty$,

所以函数 $g(x)$ 最多有一个零点.(11 分)

综上可得,实数 a 的取值范围为 $(0,1)$.(12 分)

正确求解 $a<0$ 时 $g(x)$ 的零点个数得 3 分。

回归设问得 1 分。

(二)选考题(10 分)

22. 解:(1)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+4,\\ y=\sqrt{16-t^2}\end{cases}$($t$ 为参数),

所以 $t=x-4$,代入 $y=\sqrt{16-t^2}$,可得 $y=\sqrt{16-(x-4)^2}$,

故曲线 C_1 的普通方程为 $(x-4)^2+y^2=16(y\geqslant0)$,(2 分)

正确将曲线 C_1 的参数方程化为普通方程得 2 分。

曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}s,\\ y=8\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}s\end{cases}$($s$ 为参数),

消去参数 s 可知曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x+y-8\sqrt{3}=0$,

因为圆心 $(4,0)$ 到直线 $\sqrt{3}x+y-8\sqrt{3}=0$ 的距离 $d=\dfrac{|4\sqrt{3}+0-8\sqrt{3}|}{2}=2\sqrt{3}$,

故所求弦长为 $2\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=4$.(5 分)

正确求解弦长得 3 分。

(2)因为曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-8=0$,

结合 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

可知其直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-8=0$,(7 分)

正确将曲线 C_3 的极坐标方程化为直角坐标方程得 2 分。

联立 $\begin{cases}(x-4)^2+y^2=16(y\geqslant0),\\ x+\sqrt{3}y-8=0,\end{cases}$

消去 x 整理得 $(4-\sqrt{3}y)^2+y^2=16$,解得 $y=2\sqrt{3}$ 或 $y=0$,

则可取 $A(2,2\sqrt{3})$,$B(8,0)$,(8 分)

正确求解点 A,B 的坐标得 1 分。

即 $\overrightarrow{OA}=(2,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{OB}=(8,0)$,

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times8+2\sqrt{3}\times0=16$.(10 分)

23. 解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=|3x-2|+|3x+2|$,(1 分)

正确求解 $a=2$ 时函数 $f(x)$ 的表达式得 1 分。

当 $x<-\dfrac{2}{3}$ 时,则 $-3x+2-3x-2\leqslant6$,解得 $x\geqslant-1$,即 $-1\leqslant x<-\dfrac{2}{3}$,

当 $-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$ 时,则 $-3x+2+3x+2=4\leqslant6$ 恒成立,

即 $-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$,

当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时,则 $3x-2+3x+2\leqslant6$,解得 $x\leqslant1$,即 $\dfrac{2}{3}<x\leqslant1$,(4 分)

正确求解各区间上不等式的解集得 3 分。

综上所述,原不等式的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$.(5 分)

(2)因为 $f(x)=|3x-2|+|3x+a|\geqslant|(3x-2)-(3x+a)|=|a+2|$,(7 分)

正确利用绝对值三角不等式求解函数 $f(x)$ 的最小值得 2 分。

所以 $|a+2|\geqslant4$,即 $a+2\leqslant-4$ 或 $a+2\geqslant4$,解得 $a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant2$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.(10 分)

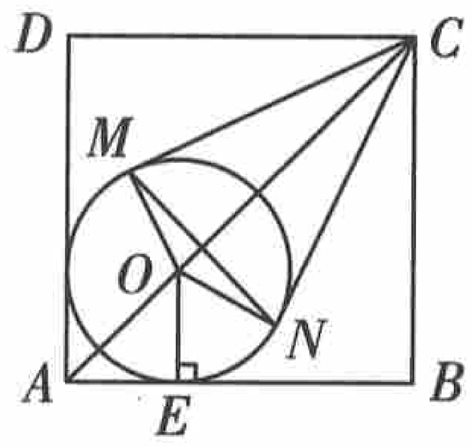
正确求解 a 的取值范围得 3 分。

详解详析

1. 由$(1-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}=2$可得，$z=2\times\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=2\mathrm{i}$，则$|z|=2$.

2. $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x^2-2x-8<0\}=\{x\in\mathbf{N}^*\mid(x+2)(x-4)<0\}=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid x-a>0\}=\{x\mid x>a\}$，又集合$A\cap B$中恰好含有2个元素，结合数轴可得$a\in[1,2)$.

3. 如图，连接ON，则$OM\perp CM$，$ON\perp CN$，因为圆O的半径为2丈，$MN=\sqrt{3}\,OM=2\sqrt{3}$丈，所以$\angle MON=120°$，即$\angle MCN=60°$，则$\angle OCM=\angle OCN=30°$，所以$OC=2OM=4$丈，过$O$点作$OE\perp AB$，结合正方形的特征可得$OA=2\sqrt{2}$丈，即$AC=4+2\sqrt{2}$丈.



第3题解图

4. 逐项分析如下：

选项	正误	原因
A	×	2018年与2017年相比，中等职业教育和普通高中的招生人数在下降
B	×	2017年中等职业教育和普通高中的招生人数差距为800−582=218，同理可得2018−2021年的招生人数差距依次为236，239，231，249，故招生人数差距最大的年份是2021年
C	×	本专科每年的招生人数增幅最大的年份是2019年
D	√	根据计算可得2017年本专科的招生人数占比为$\frac{761}{761+582+800}\approx35.5\%$，同理可得2018−2021年的本专科的招生人数占比依次约为36.9%，38.9%，38.9%，39.1%，所以2021年本专科的招生人数所占比例最高

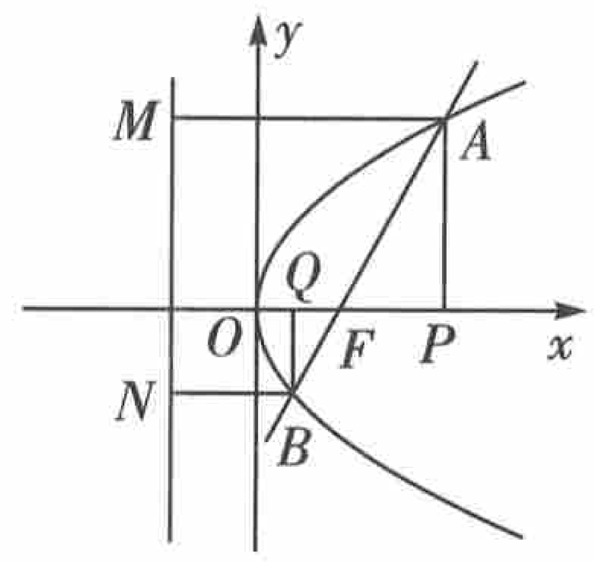
5. 因为$S_8=3(a_2+a_4+a_6+a_8)$，所以$2(a_2+a_4+a_6+a_8)=a_1+a_3+a_5+a_7$，则公比$q=\frac{a_2+a_4+a_6+a_8}{a_1+a_3+a_5+a_7}=\frac{1}{2}$，又因为$a_4=1$，所以$a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=1$，解得$a_1=8$，则$a_n=2^{4-n}$，

$$S_n=\frac{8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=16-2^{4-n}.$$

6. 由$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$可得，$f(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}^{-1}}=-\mathrm{e}$，则切点为$(-1,-\mathrm{e})$，又因为$f'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，所以$f'(-1)=\frac{1-(-1)}{\mathrm{e}^{-1}}=2\mathrm{e}$，即切线方程为$y+\mathrm{e}=2\mathrm{e}(x+1)$，令$x=0$，则$y=\mathrm{e}$；令$y=0$，则$x=-\frac{1}{2}$，所以三角形的面积$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{4}$.

7. 因为函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{\ln|x|}{x}$为定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的奇函数，所以**排除C**；当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=x^2-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{(x^4-1)+\ln x}{x^2}$，若$0<x<1$，则$x^4-1<0$，$\ln x<0$，所以$f'(x)<0$；若$x>1$，则$x^4-1>0$，$\ln x>0$，所以$f'(x)>0$，则$f(x)$在区间$(0,1)$内单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增，**排除A，B，故选D.**

8. 如图所示，分别过A，B作准线的垂线，垂足分别为M，N，分别过A，B作x轴的垂线，垂足分别为P，Q，因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，且$|AB|=8$，所以根据抛物线的定义得$|AM|=|AF|=6$，$|BN|=|BF|=2$. 则$|PF|=6-p$，$|QF|=p-2$，根据相似三角形定理易得$\triangle BQF\backsim\triangle APF$，所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|PF|}{|QF|}$，即$\frac{6}{2}=\frac{6-p}{p-2}$，解得$p=3$.



第8题解图

9. 因为函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$(a,b)$内单调且$b-a=\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}$，即$T\geqslant\pi$，所以$0<\omega\leqslant2$，又因为函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$内存在最值点，且$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}$，所以函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$内只有一个最值点，由于$0<x<\frac{\pi}{3}$，所以$0<\omega x<\frac{\pi\omega}{3}$，$\frac{2\pi}{3}<\omega x+\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi\omega}{3}+\frac{2\pi}{3}$，则$\pi<\frac{\pi\omega}{3}+\frac{2\pi}{3}\leqslant2\pi$，解得$1<\omega\leqslant4$，所以$\omega\in(1,$

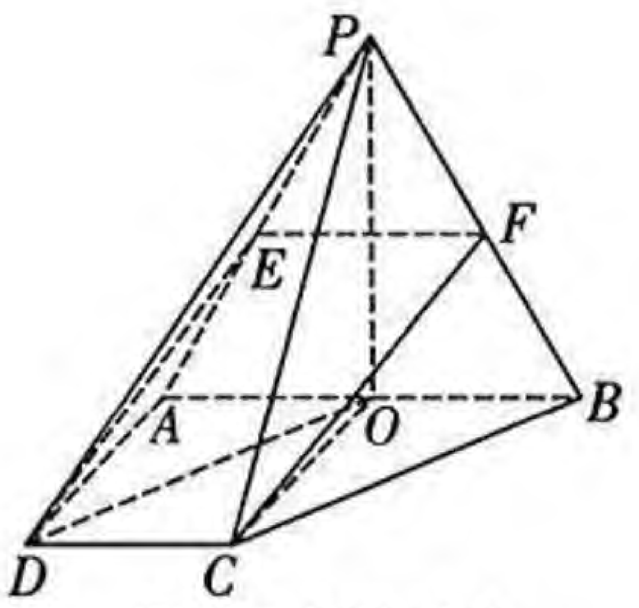
[难点]由于$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$内只有一个最值点，结合余弦函数的图象性质可得$f(x)$在$x=\pi$处取得最小值，由此可得不等式.

2]，当 ω 取得最大值时，即 $\omega=2$，$f(x)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，因为$f(0)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi=-1$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. 故选 **B**.

10. 如图所示，连接 EF,DE,CF，因为 E,F 分别为 PA，PB 的中点，所以 $EF/\!/AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$，又因为 $AB/\!/CD$，$AB=4$，$CD=2$，所以 $EF/\!/CD$ 且 $EF=CD$，则四边形 $EFCD$ 是平行四边形，即 $CF/\!/DE$，又 $DE\subset$平面 PAD，$CF\not\subset$平面 PAD，所以 $CF/\!/$平面 PAD，**A 正确**；因为平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，$\triangle PAB$ 为正三角形，取 AB 中点为 O，连接 OP，则 $OP\perp AB$，由于 $OP\subset$平面 PAB，所以 $OP\perp$平面 $ABCD$，且 $OP=2\sqrt{3}$，连接 OD,OC，因为 $\angle BAD=90°$，$AD=CD$，所以四边形 $AOCD$ 为正方形，所以 $OC\perp AB$，$OC=2$，则 $BC=2\sqrt{2}$，因为 $OD\subset$平面 $ABCD$，$OC\subset$平面 $ABCD$，所以 $OP\perp OD$，$OP\perp OC$，故$\angle PDO$ 就是 PD 与平面 $ABCD$ 所成角，由于 $OD=2\sqrt{2}$，所以在$\triangle POD$ 中，$PD=\sqrt{OP^2+OD^2}=2\sqrt{5}$，所以$\sin\angle PDO=\frac{PO}{PD}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，**B 错误**；在$\triangle POC$ 中，因为 $PC=\sqrt{OP^2+OC^2}=4$，又 $BC=2\sqrt{2}$，所以 CF 不可能垂直于 PB，而 $CF/\!/$

[难点]利用等腰三角形的基本性质(腰相等且底边上的中线与底边垂直)判断线线关系.

DE，所以 DE 不可能与 PB 垂直，**C 错误**；$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{梯形ABCD}\times OP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(4+2)\times2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，**D 错误，故选 A.**



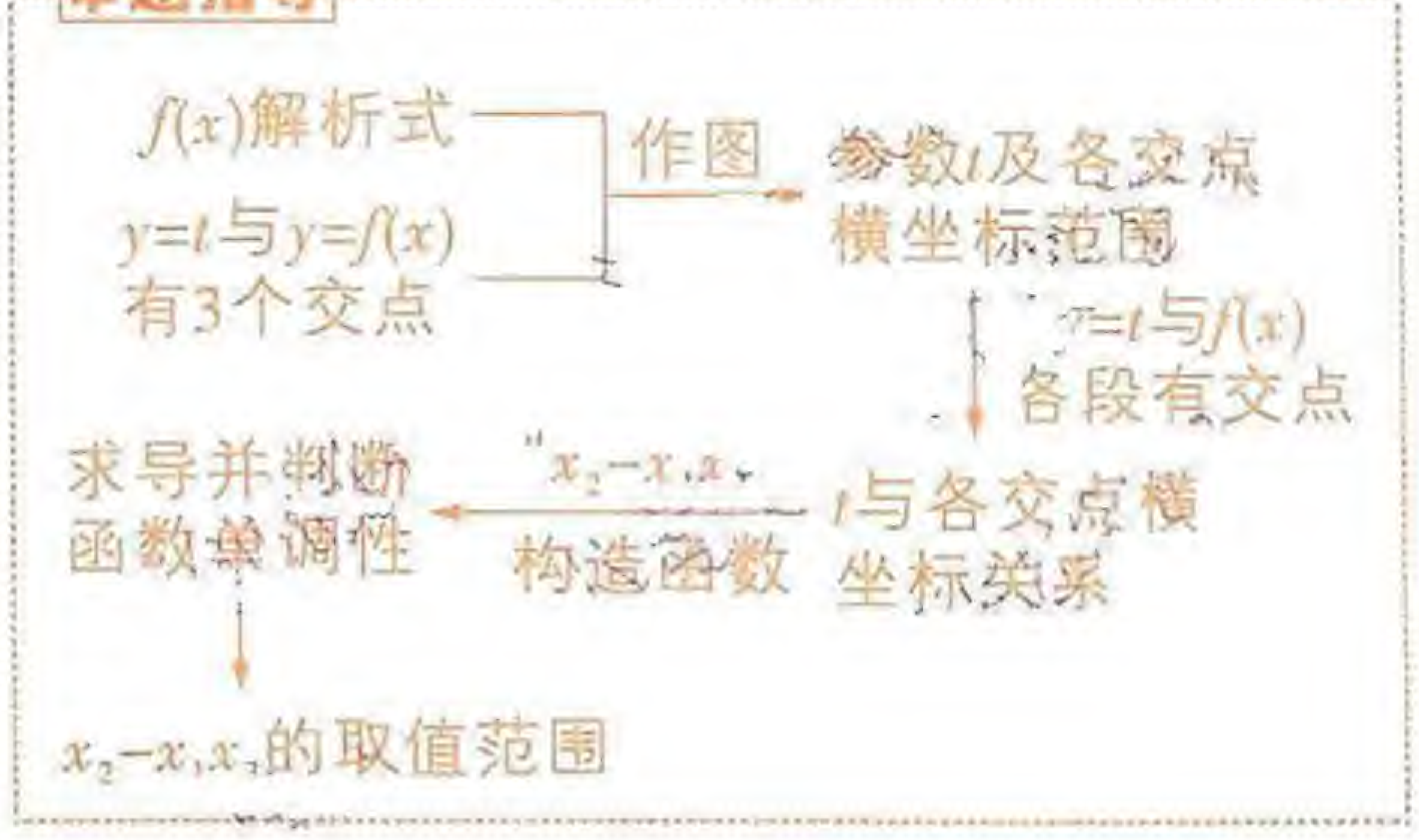
第 10 题解图

11. 因为 $B(0,4b)$，$F_2(c,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，因为$\frac{|BP|}{|PF_2|}=\lambda$，即$|BP|=\lambda|PF_2|$，则 $\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{F_2P}$，而 $\overrightarrow{PB}=(-x_0,$

[难点]由于 λ 无法直接求解，考虑点 P 为 BF_2 与 C 的交点，即 B,P,F_2 三点共线，故通过引入向量转化求解.

$4b-y_0)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x_0-c,y_0)$，所以$\begin{cases}-x_0=\lambda(x_0-c),\\4b-y_0=\lambda y_0,\end{cases}$则 $P\left(\frac{\lambda c}{1+\lambda},\frac{4b}{1+\lambda}\right)$，因为 P 在双曲线上，所以$\frac{\lambda^2c^2}{(1+\lambda)^2a^2}-\frac{16}{(1+\lambda)^2}=1$，即 $e^2=\frac{17+2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2}=17\times\frac{1}{\lambda^2}+2\times\frac{1}{\lambda}+1$，令 $t=\frac{1}{\lambda}$，即 $t\in(0,1]$，则函数$f(t)=17t^2+2t+1$ 在 $t\in(0,1]$内单调递增，所以$f(t)_{\max}=f(1)=20$，即 $1<e\leqslant2\sqrt{5}$，故 C 的离心率最大值为 $2\sqrt{5}$.

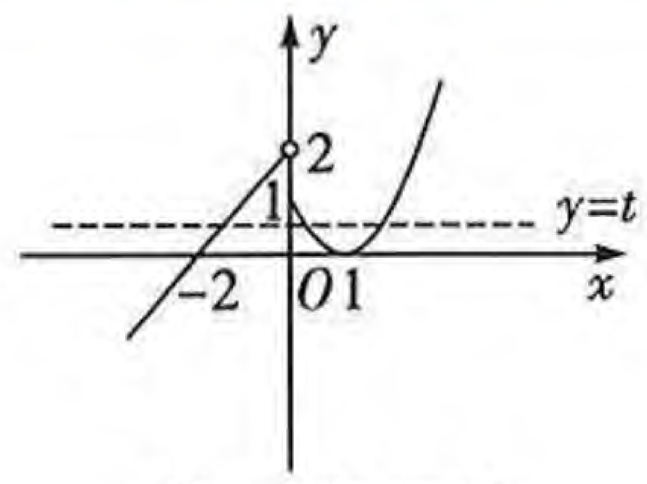
12. 审题指导



第 1 步：结合函数解析式及直线与函数图象的交点情况确定各交点横坐标的范围

因为函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<0,\\(x-1)^2,x\geqslant0,\end{cases}$ $y=t$ 与 $y=f(x)$有 3 个不同的交点. 所以根据函数的图象可得 $0<t\leqslant1$，$-2<x_1\leqslant-1$，$0\leqslant x_2<1$，$1<x_3\leqslant2$.

[难点]结合函数图象先确定各交点横坐标的正负，再结合函数解析式进一步确定各交点横坐标的取值范围.



第 12 题解图

第 2 步：建立各点横坐标与参数 t 之间的联系

根据$\begin{cases}y=t,\\y=x+2,\end{cases}$解得 $x_1=t-2$，由$\begin{cases}y=t,\\y=(x-1)^2,\end{cases}$解得 $x_2=1-\sqrt{t}$，$x_3=1+\sqrt{t}$，则 $x_2-x_1x_3=1-\sqrt{t}-(t-2)(1+\sqrt{t})$.

第 3 步：根据设问构造新函数并判断函数单调性

令$\sqrt{t}=m$，则 $0<m\leqslant1$，设 $g(m)=1-m-(m^2-2)(1+m)=-m^3-m^2+m+3$，$g'(m)=-3m^2-2m+1=-(3m^2+2m-1)=-(3m-1)(m+1)$，当 $0<m<\frac{1}{3}$时，$g'(m)>0$，当$\frac{1}{3}<m\leqslant1$ 时，$g'(m)<0$，所以函数

$g(m)$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$内单调递增,在区间$\left(\frac{1}{3},1\right]$内单调递减.

第 4 步:根据函数最值求解取值范围

则$g(m)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{86}{27}$,$g(0)=3$,$g(1)=2$,所以$g(x)\in\left[2,\frac{86}{27}\right]$,即$x_2-x_1x_3$的取值范围为$\left[2,\frac{86}{27}\right]$.

13. 因为$\boldsymbol{a}=(x+1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$,所以$x+1=-2$,则$\boldsymbol{a}=(-2,\sqrt{3})$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$,

即$\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,因为$\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,故所求夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

14. **信息提取**

①8 个不同类型的机柜,其中包括 5 个 A 类型、3 个 B 类型,两名调试员共抽取 3 个机柜进行调试;

②求两名调试员中至少有 1 人抽到 B 类型机柜进行调试的概率

两名调试员中至少有一人抽到 B 类型机柜包括"一人抽到 B 类型、两人抽到 B 类型"2 种情况,设没有一个人抽到 B 类型机柜为事件 A,则 $P(A)=$

[难点]由于"至少有 1 人抽到 B 类型机柜"包含的情况相对较多,故考虑其对立情况,即"没有一个人抽到 B 类型机柜",利用对立事件的概率进行求解.

$\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$,故两名调试员中至少有 1 人抽到 B 类型机柜进行调试的概率为$1-P(A)=\frac{23}{28}$.

15. 因为$4S_n=a_n^2+2a_n-8$①,当$n=1$时,$4a_1=a_1^2+2a_1-8$,即$(a_1-4)(a_1+2)=0$,因为$a_n>0$,所以$a_1=4$,当$n\geqslant2$时$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-8$②,①-②得$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$,即$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})-2(a_n+a_{n-1})=0$,所以$a_n-a_{n-1}=2$,则$\{a_n\}$是以 4 为首项,2 为公差的等差数列,即$a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$,所以$a_8=18$.

16. **审题指导**

直四棱柱 $\xrightarrow[A_1MN\text{的位置关系}]{CC_1\text{与平面}}$ 确定截面A_1MGN $\xrightarrow{AB=AD=2,\ AA_1=4}$ 截面边长 $\longrightarrow$ 截面面积

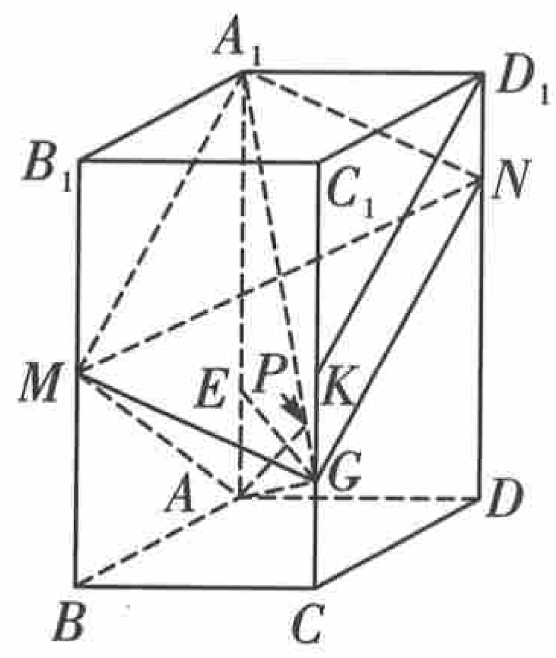
$A_1G \xrightarrow[\triangle AA_1P]{\triangle A_1EG,}$ A_1P $\longrightarrow$ $\frac{PG}{A_1G}$

第 1 步:确定截面的形状

如图,取CC_1的中点为K,连接D_1K,易得$D_1K/\!/A_1M$,又因为过A_1MN的平面交CC_1于G,则CK的中点即为G,则$KG=D_1N=1$,由四棱柱中$CC_1/\!/DD_1$

[难点]通过棱长的数量关系和位置关系,确定点 G 的位置.

可得$KG/\!/D_1N$,所以四边形D_1NGK为平行四边形,所以$D_1K/\!/NG$.



第 16 题解图

第 2 步:求解截面边长

即$A_1M/\!/NG$,所以A_1,M,G,N四点共面,因为$AB=AD=2$,$AA_1=4$,所以$A_1M=GN=2\sqrt{2}$,$A_1N=MG=\sqrt{5}$.

第 3 步:求解截面面积

又因为$MN=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$,所以在$\triangle MA_1N$中,

由余弦定理可得$\cos\angle MA_1N=\frac{8+5-9}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

由于$\angle MA_1N\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\angle MA_1N=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

故$S_{\text{截面}A_1MGN}=2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

第 4 步:根据直四棱柱棱长数量关系及 $AP\perp A_1G$ 求解 AP,A_1G

在AA_1上取一点E,使得$AE=1$,连接EG,则$EG\perp AA_1$,

且$A_1E=3$,$EG=2\sqrt{2}$,在$\text{Rt}\triangle A_1EG$中,$A_1G=\sqrt{A_1E^2+EG^2}=\sqrt{17}$,过$A$作$AP\perp A_1G$于$P$,在$\text{Rt}\triangle A_1EG$中,$\cos\angle EA_1G=\frac{A_1E}{A_1G}=\frac{3}{\sqrt{17}}$,而在$\text{Rt}\triangle AA_1P$中,$\cos\angle AA_1P=\frac{A_1P}{AA_1}=\frac{A_1P}{4}$,所以$\frac{A_1P}{4}=\frac{3}{\sqrt{17}}$,则$A_1P=\frac{12\sqrt{17}}{17}$.

第 5 步:根据线段关系求解线段比例

因此$PG=A_1G-A_1P=\frac{5\sqrt{17}}{17}$,故$\frac{PG}{A_1G}=\frac{\frac{5\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{17}}=\frac{5}{17}$.

白卷·理科数学

参考答案及评分标准

一、选择题(共60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	C	C	C	D	B	A	A	A

评分标准

第1~12题,每小题5分,与答案不符的均不给分。

二、填空题(共20分)

13. $\frac{1}{2}$ **14.** $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$ **15.** $[3,+\infty)$ **16.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第13~16题,每小题5分,与答案不符的均不给分。

三、解答题(共70分)

(一)必考题(60分)

17. 解:(1)由已知得 $S_{n+1}-S_n=3a_n+4$,即 $a_{n+1}=3a_n+4$,(2分)

正确求得 a_{n+1},a_n 间的关系得2分。

所以 $a_{n+1}+2=3(a_n+2)$,(4分)

所以$\{a_n+2\}$是首项为 $a_1+2=3$,公比为3的等比数列.(6分)

(数列$\{a_n+2\}$的首项为 a_1+2,并非 a_1)

(2)由(1)得 $a_n+2=3\cdot3^{n-1}$,所以 $a_n=3^n-2$.(7分)

正确求解数列$\{a_n\}$的通项公式得1分。

则数列$\{a_n+2n\}$的前 n 项和 $T_n=(3^1+2\times1-2)+(3^2+2\times2-2)+\cdots+[3^{n-1}+2(n-1)-2]+(3^n+2n-2)$(9分)

正确求得 T_n 的表达式得2分。

$=(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}+3^n)+2[1+2+\cdots+(n-1)+n]-2n$(10分)

$=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+2\times\frac{n(1+n)}{2}-2n=\frac{3^{n+1}}{2}+n^2-n-\frac{3}{2}$.(12分)

正确求解数列$\{a_n+2n\}$的前 n 项和 T_n 得2分。

18. 解:(1)根据列联表得 $K^2=\frac{120\times(40\times10-20\times50)^2}{60\times60\times90\times30}=\frac{40}{9}\approx4.444>3.841$,(2分)

正确求解 K^2 得2分。

所以有95%的把握认为蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐与蜜蜂种类有关联.(3分)

(2)(ⅰ)由已知公式可得,$P(A)=\frac{a}{a+b}$,$P(B|A)=\frac{a-1}{a+b-1}$,

$P(\bar{A})=\frac{b}{a+b}$,$P(B|\bar{A})=\frac{a}{a+b-1}$,(6分)

正确利用条件概率公式求解相关概率得3分。

$P(B)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b}$,

得证.(8分)

(ⅱ)①选 M 品种,令选 M 品种蜜蜂被抽到为事件 C,

则 $P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{15}$;(11分)

正确计算选择 M 品种时抽到的概率得3分。

故选 M 品种,被抽到的概率为$\frac{11}{15}$.(12分)

未进行综述扣1分。

②选 N 品种,令选 N 品种蜜蜂被抽到为事件 D,

则 $P(D)=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{24}$,(11分)

正确计算选择 N 品种时抽到的概率得3分。

故选 N 品种,被抽到的概率为$\frac{17}{24}$.(12分)

19. 解:(1)如图,因为$A_1O\perp$底面ABC,$AC\subset$平面ABC,所以$A_1O\perp AC$;

由O为底面正$\triangle ABC$的中心,可知$BO\perp AC$,(2分)

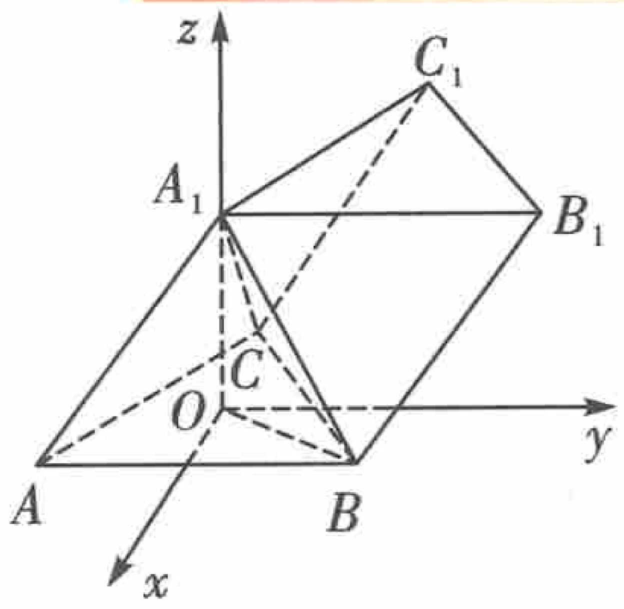
正确证明线线垂直得2分。

又$A_1O\cap BO=O$,所以$AC\perp$平面A_1BO,(4分)

又$AC\subset$平面A_1AC,故平面$A_1AC\perp$平面A_1BO.(6分)

正确证明面面垂直得2分。

(2)结合(1)中所得,分别以CO,OA_1所在直线为x,z轴,过点O作AB的平行线为y轴,建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$.



第19题解图

由$AC=AA_1=2$,$\triangle ABC$为正三角形,可知$O(0,0,0)$,$A_1\left(0,0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$,$B_1\left(0,2,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,$C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$,

所以$\overrightarrow{A_1C}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$,

$\overrightarrow{BB_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,(8分)

正确求解各向量的坐标得2分。

设平面BCC_1B_1的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x+y+\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$

取$x=1$,则$y=-\sqrt{3}$,$z=\sqrt{2}$,故$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{2})$,(10分)

正确求解平面BCC_1B_1的一个法向量得2分。

设A_1C与平面BCC_1B_1所成角为θ,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\boldsymbol{n}\rangle|$

$$=\left|\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+0+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}\times\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

(直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值)

故A_1C与平面BCC_1B_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.(12分)

20. 解:(1)$f'(x)=(x-1)e^{x-1}-2a(x-1)=(x-1)(e^{x-1}-2a)$.(1分)(所求解导函数若可因式分解,则优先考虑因式分解,便于求解导函数的零点)

正确求解导函数并进行因式分解得1分。

①当$-2a\geqslant0$,即$a\leqslant0$时,$e^{x-1}-2a>0$,令$f'(x)=0$,则$x=1$,

当$x\in(-\infty,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,故$f(x)$有唯一的极小值点1;(2分)

正确求解$a\leqslant0$时函数$f(x)$极值点得1分。

②当$-2a<0$,即$a>0$时,令$f'(x)=0$,则$x_1=1$,$x_2=\ln(2a)+1$,

(i)当$a=\frac{1}{2}$时,$\ln(2a)+1=1$,则$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,此时$f(x)$无极值点;

（ⅱ）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\ln(2a)+1<1$，当 $x\in(-\infty,\ln(2a)+1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\ln(2a)+1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，从而 $f(x)$ 有两个极值点，极大值点为 $\ln(2a)+1$，极小值点为 1；

（ⅲ）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$\ln(2a)+1>1$，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,\ln(2a)+1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln(2a)+1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

从而 $f(x)$ 有两个极值点，极大值点为 1，极小值点为 $\ln(2a)+1$.（5 分）

正确分类讨论 $a>0$ 时 $f(x)$ 的极值点，且讨论一种情况得 1 分，三种情况均讨论得 3 分。

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 有唯一的极小值点 1；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点，极大值点为 $\ln(2a)+1$，极小值点为 1；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点，极大值点为 1，极小值点为 $\ln(2a)+1$.（6 分）

未对分类讨论的结果进行综述扣 1 分。

（2）由题得 $g(x)=f(x)+(3-x)e^{x-1}=e^{x-1}-a(x-1)^2$，

则 $g'(x)=e^{x-1}-2a(x-1)$，$g''(x)=e^{x-1}-2a$，

由 x_1,x_2 为函数 $g(x)$ 的两个极值点可知 $g'(x_1)=g'(x_2)=0$，

则 $g'(x)$ 在 **R** 上不单调，则 $g''(x)=0$ 有解，（$g'(x)$ 不单调，即 $g'(x)$ 存在极值点，故 $g''(x)=0$ 有解）

故 $-2a<0$，则 $a>0$.（7 分）

正确求解 a 的取值范围得 1 分。

由 $e^{x_1-1}=2a(x_1-1)$，$e^{x_2-1}=2a(x_2-1)$ 知 $e^{x_1-1}-e^{x_2-1}=2a(x_1-x_2)$，

$x_1-1>0$，$x_2-1>0$，（由 $e^x>0$，$a>0$ 可知 $x_1-1>0$，$x_2-1>0$）

所以 $2a=\frac{e^{x_1-1}-e^{x_2-1}}{x_1-x_2}$.

令 $e^{x_1-1}=m>1$，$e^{x_2-1}=n>1$，则 $x_1-1=\ln m$，$x_2-1=\ln n$，$m\neq n$，

故 $2a=\frac{m-n}{\ln m-\ln n}$，且 $e^{\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}}=e^{\sqrt{\ln m\ln n}}<e^{\frac{\ln m+\ln n}{2}}=e^{\ln\sqrt{mn}}=\sqrt{mn}$，（9 分）

正确利用换元法求解关于 a 的表达式得 2 分。

令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-x^2+2x-1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$，

则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)<h(1)=0$，

即对 $\forall x\in(1,+\infty)$，有 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，

令 $t=\sqrt{\frac{m}{n}}(m>n>0)$，则 $t>1$，

则 $\ln\sqrt{\frac{m}{n}}<\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$，即 $\sqrt{mn}<\frac{m-n}{\ln m-\ln n}$，

所以 $e^{\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}}<\sqrt{mn}<\frac{m-n}{\ln m-\ln n}=2a$，

白卷·理科数学

则$(x_1-1)(x_2-1)<(\ln 2a)^2$,即$x_1x_2<(\ln 2a)^2+x_1+x_2-1$,(11 分)

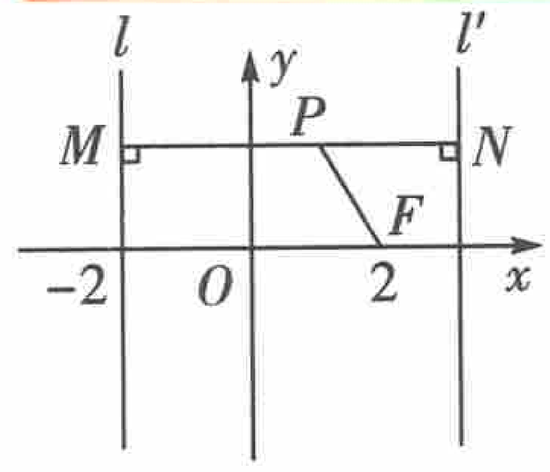
正确求解关于x_1x_2的不等式得 2 分。

又$\dfrac{(x_1-1)+(x_2-1)}{2}=\dfrac{\ln m+\ln n}{2}=\ln\sqrt{mn}<\ln 2a$,

所以$x_1+x_2<2\ln 2a+2$,故$x_1x_2<(\ln(2a)+1)^2$.(12 分)

正确证明不等式得 1 分。

21. 解:(1)过 P 分别作直线 l,l' 的垂线,垂足为 M,N,则由题意可得$|PF|+|PN|=|PM|+|PN|$,即$|PF|=|PM|$,



第 21 题解图①

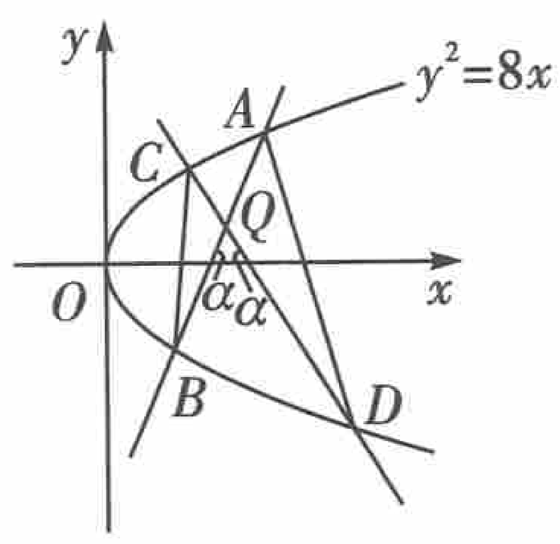
则由抛物线的定义可知,动点 P 的轨迹为以 $F(2,0)$ 为焦点,直线 $l:x=-2$ 为准线的抛物线,(2 分)

正确判断动点 P 的轨迹类型得 2 分。

则有$\dfrac{p}{2}=2$,$p=4$,故 E 的方程为 $y^2=8x$.(3 分)

正确求解 E 的方程得 1 分。

(2)由题目条件过 $Q(3,1)$ 作倾斜角互补的两条直线分别交 E 于 A,B 两点和 C,D 两点,可知直线 AB,CD 的斜率互为相反数. 设 $l_{AB}:x=m(y-1)+3$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,



第 21 题解图②

由直线 AB 的倾斜角 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$,且直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{1}{m}$,(直线 $x=my+n$ 的斜率为$\dfrac{1}{m}$,解题时往往忽略这一细节而致错)

可知 $\tan\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{1}{m}\leqslant\tan\dfrac{\pi}{4}$,解得 $1\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$.(5 分)

正确求解直线 AB 斜率的取值范围得 2 分。

联立$\begin{cases}y^2=8x,\\x=m(y-1)+3,\end{cases}$消去 x 可得 $y^2-8my+8m-24=0$,

则$\Delta=32(2m^2-m+3)>0$,$y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=8m-24$,

则$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(8m)^2-4\times(8m-24)}=4\sqrt{2}\sqrt{(1+m^2)(2m^2-m+3)}$,

同理可得$|CD|=4\sqrt{2}\sqrt{(1+m^2)(2m^2+m+3)}$.(7 分)(由直线 AB,CD 的斜率互为相反数,可考虑用$-m$ 替换$|AB|$表达式中的 m,整体代换,简化运算)

正确求解$|AB|$,$|CD|$的表达式得 2 分。

记直线 AB,CD 的夹角为 θ,

则 $S_{四边形ACBD}=\dfrac{1}{2}|QA||CD|\sin\theta+\dfrac{1}{2}|QB||CD|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CD|\sin\theta=16(1+m^2)\sqrt{(2m^2+3)^2-m^2}\sin\theta$,(由于点 A,B 与 C,D 的位置不确定,则直线 AB,CD 的夹角 θ 等于$\angle BQD$ 或$\angle AQD$,$|QA|\sin\theta$ 等于点 A 到直线 CD 的距离,$|QB|\sin\theta$ 等于点 B 到直线 CD 的距离,故考虑将四边形 $ACBD$ 的面积分为$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 的面积之和进行求解)

又 $\sin\theta=\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2k_{AB}}{k_{AB}^2+1}=\dfrac{\frac{2}{m}}{\frac{1}{m^2}+1}=\dfrac{2m}{1+m^2}$,

白卷 · 理科数学

（θ 等于 $\angle BQD$ 或 $\angle AQD$，又 $\sin\angle BQD=\sin\angle AQD$，且 $\angle BQD+2\alpha=\pi$，则 $\sin\angle BQD=\sin 2\alpha$，故 $\sin\theta=\sin 2\alpha$）

则 $S_{四边形ACBD}=32m\sqrt{(2m^2+3)^2-m^2}$

$=32\sqrt{m^2(4m^4+11m^2+9)}$，（10 分）

正确求解 $S_{四边形ACBD}$ 的表达式得 3 分。

令 $m^2=t$，$1\leqslant t\leqslant 3$，则 $S_{四边形ACBD}=32\sqrt{4t^3+11t^2+9t}$，

令 $f(t)=4t^3+11t^2+9t$，则 $f'(t)=12t^2+22t+9$，

当 $1\leqslant t\leqslant 3$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增，

则 $(S_{四边形ACBD})_{\max}=32\sqrt{4\times3^3+11\times3^2+9\times3}=96\sqrt{26}$，

故四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $96\sqrt{26}$.（12 分）

正确求解四边形 $ACBD$ 面积的最大值得 2 分。

（二）选考题（10 分）

22. 解：（1）由曲线 C_1 的参数方程可知 $x=-1+\dfrac{1}{2}t$，则 $t=2x+2$，

代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ 得曲线 C_1 的普通方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2x+2)$，

即 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$，（2 分）

正确将曲线 C_1 的参数方程转化为普通方程得 2 分。

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可知曲线 C_2 的普通方程为 $3x^2+4y^2=12$，

即 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，（3 分）

故曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sqrt{3}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.（5 分）

正确求解曲线 C_2 的参数方程得 2 分。

（2）由题可知，点 Q 到曲线 C_1 的距离 $d=\left|\dfrac{2\sqrt{3}\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi+\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right|$

$=\left|\dfrac{\sqrt{15}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\varphi-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin\varphi\right)+\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{15}\cos(\varphi+\beta)+\sqrt{3}}{2}\right|$，

正确求解点 Q 到曲线 C_1 的距离的表达式得 3 分。

其中 $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，（8 分）

当 $\cos(\varphi+\beta)=1$ 时，$d_{\max}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$，

故点 Q 到曲线 C_1 距离的最大值为 $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$.（10 分）

正确求解点 Q 到曲线 C_1 距离的最大值得 2 分。

23. 解：（1）因为 $xyz=2$，所以 $\dfrac{2}{x}=yz\leqslant\dfrac{y^2+z^2}{2}$，

同理可得 $\dfrac{2}{y}\leqslant\dfrac{x^2+z^2}{2}$，$\dfrac{2}{z}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，（3 分）

正确利用基本不等式对已知等式进行变形得 3 分。

所以 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}\leqslant\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{x^2+z^2}{2}+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，故 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqslant\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$，

当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立.（5 分）

正确证明不等式得 2 分。

（2）$x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{9}(2^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant\dfrac{1}{9}(2x+y+2z)^2$，（8 分）

正确利用柯西不等式对已知等式进行变形得 3 分。

因为 $2x+y+2z=9$，所以 $x^2+y^2+z^2\geqslant 9$，当且仅当 $x=2y=z$ 时等号成立.（10 分）

详解详析

1. 由复数的几何意义得 $z=0+ai$，因为 $|z|=2$，所以 $z^2=0+a^2=4, a=\pm 2$.

2. 由集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,(x-3)(x+1)\leqslant 0\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}=\{-1,0,1,2,3\}$，又因为集合 $B=\{0,2\}$，所以 $A\cap B=\{0,2\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}=A$，即 $B\subseteq A$.

3. 由题意得 $|a+3b|=\sqrt{|a|^2+9|b|^2+6a\cdot b}=\sqrt{|a|^2+9|b|^2+6|a||b|\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{1+18+6}=5$，则 $2|a+3b|=10$.

[易错]容易忽略所求设问中的“2”而误选 C.

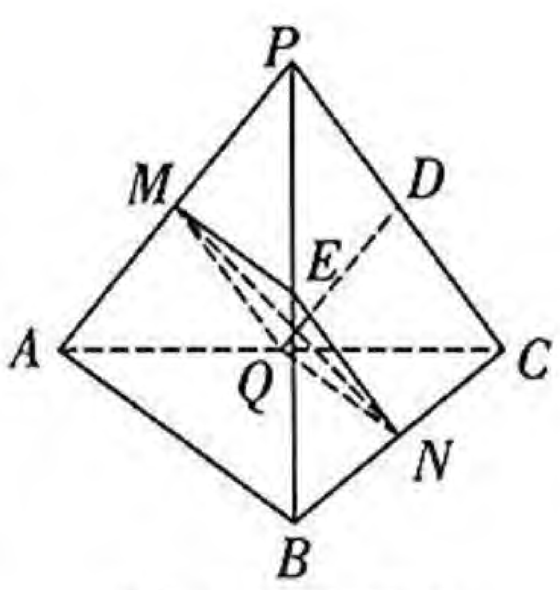
4. 实验组不算上腐蚀数据的中位数为 15，因此实验组被腐蚀数据为 13，所以实验组原数据总值为 180，又因为对照组数据总值比实验组数据总值多 35，所以对照组数据总值为 215，因此对照组被腐蚀的数据为 16.

5. 因为从静止状态进行匀加速，所以 $v_0=0$，由 $x(t)=v_0t+\frac{1}{2}kt^2$ 知 $\frac{10}{7}=\frac{1}{2}\times 60^2\times k$，得 $k=\frac{1}{1260}\ \mathrm{km/s^2}$，因此由 $v=x'(t)=v_0+kt$ 得，$\frac{600}{3600}=\frac{1}{1260}t$，得 $t=210$ s.

[易错]容易忽略 k 是根据时间单位秒(s)来计算的，而时速 600 公里是以小时来记，故需要进行时间单位间的转化.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\tan A=\sqrt{3}$，$A\in(0,\pi)$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 得 $c=2$，又由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $a^2=(2c)^2+c^2-2(2c)c\cos\frac{\pi}{3}=16+4-8=12$，所以 $a=2\sqrt{3}$.

7. 如图所示，取 PB 中点 E，连接 ME，EN，又因为在 $\triangle APC$ 中，M，Q 分别为 AP，AC 的中点，则 $MQ/\!/PC$，同理 $QN/\!/AB$，$ME/\!/AB$，$EN/\!/PC$，所以四边形 $MENQ$ 为平行四边形，线段 EN 所在直线即为平面 MQN 与平面 PBC 的交线，故



第 7 题解图

[难点]由于交线 l 是未知的，故需要通过作辅助线，证明平面内线段的位置关系，从而确定交线 l.

直线 QD 与直线 l 的所成角即为直线 AP 与直线 PC 所成角，所以在 $\triangle APC$ 中，$\cos\angle APC=\frac{PC^2+PA^2-AC^2}{2\cdot PC\cdot PA}=\frac{(6\sqrt{3})^2+(6\sqrt{3})^2-6^2}{2\times 6\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$，因为异面直线夹角范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以直线 QD 与直线 l 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

8. 设 $H(x,y)$，由点 H 到 A，B 距离之比可得 $\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\sqrt{3}$，整理得到 $(x-4)^2+y^2=12$，所以点 H 的轨迹为圆，即曲线 C 是以 $(4,0)$ 为圆心，$2\sqrt{3}$ 为半径的圆，又直线 $x-y-3=0$ 与曲线 C 相交于 M，N，所以由点到直线距离公式可得圆心 C 到直线 $x-y-3=0$ 的距离 $d=\left|\frac{4-0-3}{\sqrt{1+1}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $MN=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{46}$，又定点 D 到直线 $x-y-3=0$ 的距离为 $d=\left|\frac{6-0-3}{\sqrt{1+1}}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $S_{\triangle MDN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{46}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{23}}{2}$，$S_{\triangle PDQ}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$，故 $\frac{S_{\triangle MDN}}{S_{\triangle PDQ}}=\frac{\sqrt{23}}{3}$.

9. 由辅助角公式可得 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，因为其一个零点 $\frac{\pi}{4}$ 与相邻的一条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{4}$ 可知 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$. 又 $\frac{2\pi}{\omega}=T$，所以 $\omega=2$，由零点为 $\frac{\pi}{4}$ 可得 $2x+\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，因为 $x=\frac{\pi}{4}$，所以 $\theta=-\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\theta=\frac{\pi}{6}$，满足题意，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，又因为 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x)$，所以 $g(x)=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin 2x$，所以其单调递减区间为 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，即 $x\in\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$，结

合选项可知当 $k=0$ 时,**B 项符合题意.**

10. 因为 $5a+1=5\ln 5$,所以 $a=\ln 5-\frac{1}{5}$,$b=\ln e^3-\frac{1}{e^3}$. 所

[难点]由于 a,b,c 各项都不相同,需要将各式进行变形建立联系,进而才能比较其大小关系,所以此处对 b 进行变形.

以构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}(x>0)$,则 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}(x>0)$ 为单调递增函数,因为 $e^3>5$,所以 $a<b$. 又因为 $c=e^3e^{e^3}-\frac{1}{e^3}$,构造函数 $g(x)=xe^x-\frac{1}{x}$,由 $f(x)-g(x)=\ln x-xe^x$,当 $x=e^3$ 时,$f(e^3)-g(e^3)=$

[难点]观察函数 $g(x)$ 的结构特征,结合 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$,两个函数具有公共项,故考虑利用作差法比较 b,c 的大小.

$3-e^3e^{e^3}<0$,所以 $b<c$,综上 $a<b<c$.

11. 由椭圆离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c}{a}$,则 $a=\sqrt{2}c$. ①当 $t^2>1$ 时,

[易错]容易忽略 t 的大小未知而默认 $t^2>1$ 误选 C.

由 $b^2=1$,$a^2=b^2+c^2$ 可得 $2c^2=1+c^2$,解得 $c=1$,$a=\sqrt{2}$,故椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,因为过点 $P(1,2)$ 的直线与椭圆相切,设切线方程为 $x-1=m(y-2)$,代入椭圆方程得到 $(1+2m^2)y^2+4m(1-2m)y+8m^2-8m=0$①,由题意得 $\Delta=0$,$16m^2(1-2m)^2-4(1+2m^2)\cdot 8m(m-1)=0$,化简得 $16m(2-m)=0$,解得 $m=0$ 或 2,直线方程分别为 $x=1$ 与 $x-2y+3=0$,所以结合椭圆方程可得切点分别为 $(1,0)$ 与 $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$,所以由两点式得到直线 AB 的方程为 $x+$

[难点]由于 m 有两个,所以需要在确定直线方程后,需将 m 代入①式求解切点纵坐标,再代回直线方程求解横坐标.

$y-1=0$;

②当 $0<t^2<1$ 时,$a^2=1$,$b^2=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,则椭圆方程为 $x^2+2y^2=1$,同理可以得到 $m=0$ 或 $\frac{8}{7}$,直线方程分别为 $x=1$ 与 $7x-8y+9=0$,结合椭圆方程可得切点分别为 $(1,0)$ 与 $\left(-\frac{7}{9},\frac{4}{9}\right)$,对应直线方程为 $x+4y-1=0$,**综上选 A.**

12. **审题指导**

$f(x)+f(-x)=0$,$f(1-x)=f(1+x)$ → 函数奇偶性 → 函数周期性

$(0,1]$上单调且 $f[f(x)-2^x+2^{-x}]=\frac{5}{2}$ → 已知区间上的函数值 → $\sum_{k=1}^{2022}kf(k)$

第 1 步:结合奇函数的性质确定函数周期

因为 $f(x)+f(-x)=0$,所以 $f(x)=-f(-x)$,又 $f(1-x)=f(1+x)$,可得 $f(2-x)=f(x)$,即 $-f(x-2)=f(x)$,可得 $-f(x)=f(x+2)$,即 $f(-x)=f(x+2)$,可得 $f(-x-2)=f(x+4)$,即 $-f(x+2)=f(x+4)$,进而可得 $f(x)=f(x+4)$. 所以 $f(x)$ 是以 4 为一个周期的周期函数.

第 2 步:求解函数在已知区间上的函数值

又 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调且 $f[f(x)-2^x+2^{-x}]=\frac{5}{2}$,令 $t=f(x)-2^x+2^{-x}$,则 $f(t)=\frac{5}{2}$,$f(x)=2^x-2^{-x}+t$,则 $f(t)=2^t-2^{-t}+t=\frac{5}{2}$,因为 $g(x)=2^x-2^{-x}+x$ 在 **R** 上单调递增且 $g(1)=\frac{5}{2}$,所以 $t=1$,$f(x)=2^x-2^{-x}+1$,即 $f(1)=\frac{5}{2}$.

第 3 步:结合函数周期性求解各特殊点处的函数值

所以 $f(1)=f(5)=f(9)=\cdots=f(2021)=\frac{5}{2}$,$f(-1)=f(3)=f(7)=\cdots=f(2019)=-\frac{5}{2}$,$f(0)=0$,又 $f(2-x)=f(x)$,令 $x=0$,$f(2)=f(0)=0$,$f(4)=f(0)=0$,$f(6)=f(2)=0$,…,所以 $f(0)=f(2)=f(4)=\cdots=f(2022)=0$.

第 4 步:求解 $\sum_{k=1}^{2022}kf(k)$

所以 $\sum_{k=1}^{2022}kf(k)=\frac{5}{2}(1-3+5-7+\cdots+2017-2019+2021)=\frac{5}{2}(-2\times505+2021)=\frac{5055}{2}$.

13. 由 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,$2\cos^2\alpha-5\sin\alpha+1=2(1-\sin^2\alpha)-5\sin\alpha+1=-2\sin^2\alpha-5\sin\alpha+3=0$,整理得 $(-2\sin\alpha+1)(\sin\alpha+3)=0$,从而 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=$

-3,结合正弦函数 $y=\sin x$ 的图象性质可得 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,所以 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

14. 选择条件①,因为 C 过 $M(3,0)$,所以 $a=3$,又双曲线 $\frac{x^2}{9-k}-\frac{y^2}{7+k}=1$ 中,$c^2=9-k+7+k=16$,即 $c=4$,$b^2=c^2-a^2=7$,则双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$;

选择条件②,由 $\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=\frac{14}{3},\\ \frac{1}{2}c\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{14}{3},\end{cases}$ 解得 $c=4$,结合 $c^2=$

[难点]根据题意,结合通径公式及三角形面积公式得到关于 a,b,c 的等式.

a^2+b^2,解得 $a=3$,$b=\sqrt{7}$,所以双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$.

15. 由题意 $f'(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$,令 $g(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$,$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$,$f'(x)$

[难点]由于一阶导数不能判断函数的单调性,故需再次求导进行判断.

单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$f'(x)$ 单调递增,所以 $f'(x)\geqslant f'(1)=2$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(m)=f\left(\frac{1}{n}\right)$,所以 $m=\frac{1}{n}$,即 $m+2n=m+\frac{2}{m}$,

又 $y=x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}\,(x>0)$,当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立,且 $y=x+\frac{2}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

[难点]结合对勾函数的图象性质得到函数的单调性.

所以 $m+\frac{2}{m}\geqslant 3$,故 $m+2n$ 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

16. **审题指导**

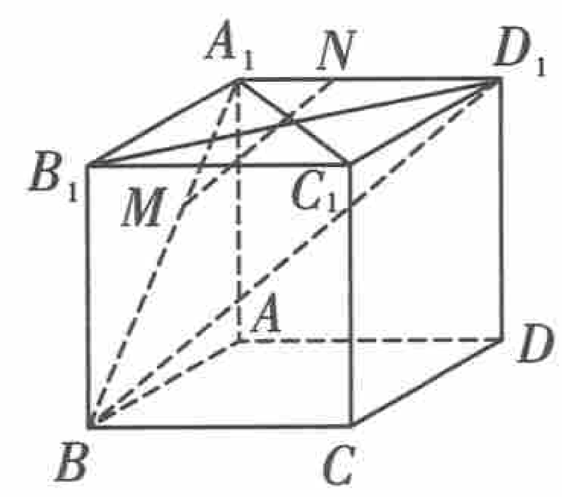
棱长为1的正方体 M,N 的位置 $\xrightarrow{A_1M=\sqrt{2}A_1N}$ MN 与正方体相关线段位置关系

EF 为平面 A_1C_1D 与正方体外接球截面中的动弦 —— $|EF|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ —— EF 与 MN 的位置关系

EF 与 MN 的位置关系 $\xrightarrow{将异面直线间的距离进行转化}$ 异面直线间距离

第 1 步:根据正方体的结构特征证明位置关系

由正方体的结构特征结合 $A_1M=\sqrt{2}A_1N$ 可得 $MN/\!/BD_1$,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,易知 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1,又 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1,所以 $A_1C_1\perp BD_1$,又结合正方体结构特征可得 $A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1,故 $A_1D\perp BD_1$,由 $A_1C_1\cap A_1D=A_1$,可得 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D.



第 16 题解图①

第 2 步:确定 EF 的位置并与截面圆中线段建立联系

故 $BD_1\perp EF$. BD_1 与平面 A_1C_1D 的交点即为所截圆面的圆心.

[难点]在正方体中,体对角线恰好为其外接球的直径,又平面 A_1C_1D 所截正方体的外接球为圆面($\triangle A_1C_1D$ 的外接圆),故球的直径必过外接圆的圆心.

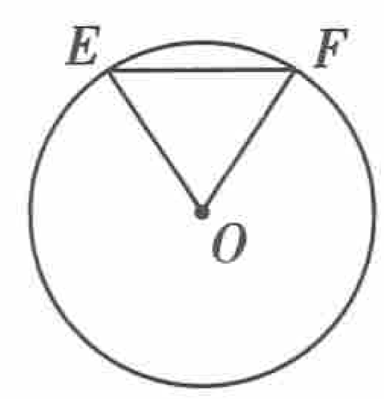
第 3 步:将所求异面直线的距离进行转化

记圆心为点 O,由正方体性质可得 $\triangle A_1C_1D$ 为边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形,所以圆 O 的半径 $|OA_1|=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $|OA_1|=|EF|$.

又结合 $MN/\!/BD_1$ 可得 $MN\perp EF$,

故直线 MN 与 EF 之间的距离即为 MN 与平面 A_1C_1D 的交点到 EF 的距离.

[难点]根据 $MN\perp$ 平面 A_1C_1D,将异面直线间距离转化为线面交点到直线的距离.



第 16 题解图②

第 4 步:求异面直线间的距离

则 $\triangle OEF$ 为正三角形,O 到 EF 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 当且仅当 MN 为体对角线 BD_1 时,线段 MN 的长度取得最大值,直线 MN 与 EF 之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.