第③处，由后文“不仅不同品种的睡莲具有不同花色，甚至同一品种的睡莲也拥有多种花色”可知，此处介绍睡莲花色丰富的特点，故此处可填写主谓句“花色非常丰富”。

(2)①画波浪线的句子使用了拟人和比喻的修辞手法。②将睡莲比作“睡美人”，“依随人类‘日落而息、日出而作’”，赋予睡莲以人的行为特点，生动形象地写出了睡莲开启和闭合的规律性，语言生动活泼，真实形象。(修辞手法 2 分，表达效果 3 分)

【解析】首先指出画波浪线的句子所用的修辞手法，由“也依随人类‘日落而息、日出而作’”可知，该句赋予睡莲以人的行为特征，使用了拟人的修辞手法；由“花中睡美人”可知，该句将“睡莲”比作“睡美人”，使用了比喻的修辞手法。其次，分析两种修辞手法的表达效果，拟人的修辞手法赋予睡莲以人的行为特征，使语言生动活泼，真实形象；比喻的修辞手法生动地写出了睡莲花瓣开合的规律性，显得亲切自然。

理科数学

新素材

1. B 充分性：由诗句的大意可知，将士不攻破楼兰则不返回家乡，因此“不破楼兰”能推出“不还”，故“不破楼兰”是“不还”的充分条件. 必要性：“不还”的前提条件并不一定是“不破楼兰”，也有可能是将士英勇牺牲，则“不还”不能推出“不破楼兰”，故“不破楼兰”是“不还”的不必要条件. 综上所述，“不破楼兰”是“不还”的充分不必要条件.

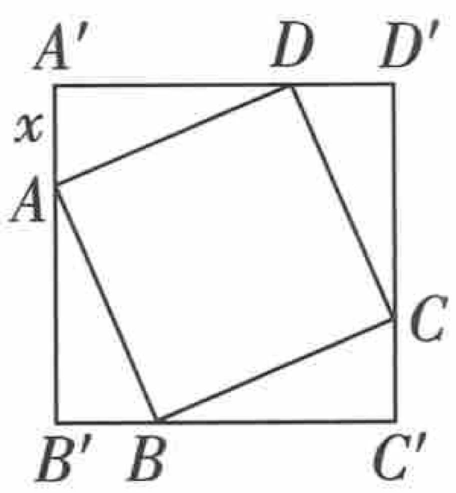
2. B 第一类：若快递员先送 A 类物品，则所走的最短线路种数为 $C_5^1C_2^1C_2^1=20$ 种.

[难点]由于所走线路需要最短，所以选定一个地区后其余的只能按顺时针或逆时针进行，因此 1-5 地区有 C_5^1 种，且 1-5 地区、6-10 地区各有顺时针、逆时针 C_2^1 种情况.

第二类：若快递员先送 B 类物品，则所走的最短线路种数为 $C_5^1C_2^1C_2^1=20$ 种. 因此，快递员所走的最短线路的种数为 40 种.

3. C 联立$\begin{cases}x^2=-2py,\\ y=kx+b,\end{cases}$消去 y 化简整理可得 $x^2+2pkx+2pb=0$，由韦达定理得$\begin{cases}x_1+x_2=-2pk,\\ x_1x_2=2pb,\end{cases}$**A 错误**；由题意可得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，又 $y_1=\dfrac{x_1^2}{-2p}$，$y_2=\dfrac{x_2^2}{-2p}$，解得 $b=-2p$，由弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{4p^2k^2+16p^2}$，当 $k=0$ 时 $|AB|$ 最短，此时 $|AB|=4p$，即半径的最小值为 $2p$，**B 错误**；由题意可得 $\pi\cdot\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2=16\pi p^2$，解得 $|AB|=8p$，且 $|AF|^2+|BF|^2=|AB|^2=64p^2$，则圆心到 x 轴的距离 d_1 等于圆心到抛物线准线的距离减去 $\dfrac{p}{2}$，结合抛物线的定义可知 $d_1=\dfrac{1}{2}(|AF|+|BF|)-\dfrac{p}{2}$，又 $(|AF|+|BF|)^2\leqslant 2(|AF|^2+|BF|^2)=128p^2$，所以 $|AF|+|BF|\leqslant 8\sqrt{2}p$，故 $d_1\leqslant\dfrac{8\sqrt{2}-1}{2}p$，**C 正确**；对方程 $x^2=-2py$ 求导得 $y'=-\dfrac{x}{p}$，故切线 QA 的方程为 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{p}\cdot(x-x_1)$，即$\dfrac{x_1}{p}x+y+y_1=0$，同理得切线 QB 的方程为$\dfrac{x_2}{p}x+y+y_2=0$，两式联立解得点 $Q(-kp,-b)$，由点到直线的距离公式得 Q 到 AB 的距离为 $d_2=\dfrac{|pk^2-2b|}{\sqrt{1+k^2}}$，由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，则 $S_{\triangle ABQ}=\dfrac{1}{2}|AB|d_2=\dfrac{1}{2}|pk^2-2b|\cdot\sqrt{4p^2k^2-8pb}$，又 $k^2\geqslant 0$，$b<0$，故当 $k^2=0$ 时，$\triangle ABQ$ 的面积最小，最小值为 $-2b\sqrt{-2pb}$，**D 错误**.

4. $\left[\dfrac{9}{2},9\right]$ 如图为过正四棱锥底面 $ABCD$ 与正方体的截面图. 设 $AA'=x(0\leqslant x\leqslant 3)$，则 $AB'=3-x$，所以 $AD^2=x^2+(3-x)^2=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$.



第 4 题解图

所以 $S_{正方形ABCD}=AD^2\in\left[\dfrac{9}{2},9\right]$. 所以根据对称性可知 $V_{八面体}=\dfrac{1}{3}S_{正方形ABCD}\times\dfrac{3}{2}\times 2=AD^2\in\left[\dfrac{9}{2},9\right]$.

5. 0.304 甲队在每轮点球比赛获胜的概率为 $p_1=0.8\times(1-0.5)=0.4$，甲队在每轮点球比赛平局的概率为 p_2

$=0.8\times0.5+(1-0.8)\times(1-0.5)=0.5$. 由题可知最终甲队获胜,则后三轮比赛只能有两种情况:①甲获胜两轮,剩下一轮甲乙平局,此时甲队获胜的概率为 $C_3^2\cdot0.4^2\times0.5=0.24$;②甲获胜三轮,此时甲队获胜的概率为 $0.4^3=0.064$,故最终甲队获胜的概率为 0.304.

6. 解:(1)由题意得 $\bar{x}=\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=3.5$,

$\bar{y}=\frac{1}{6}\times(18+31+24+29+34+38)=29$, ……… (2 分)

则 $\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{35}{2}$,故 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sqrt{70}}{2}$,

同理 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=16$,

故 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{57}{\frac{\sqrt{70}}{2}\times16}\approx0.85$. ……………………………………………… (4 分)

(2)根据题意,得 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{57}{17.5}\approx3.26$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx29-3.26\times3.5=17.59$, ………… (7 分)

所以 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=3.26x+17.59$.

2023 年对应的年份编号为 8,故估计 2023 年的科技改革投入资金为 $3.26\times8+17.59=43.67$(万元). ……………………………………………… (9 分)

(3)看法一:根据第(2)问求出的回归方程可以看出,随着时间的推移,该企业对科技改革投入资金呈线性增长. 而科技是第一生产力,所以该企业未来五年的科技改革投入资金会越来越多,甚至可能会呈指数型增长. ……………………………… (12 分)

看法二:根据第(2)问求出的回归方程可以看出,随着时间的推移,该企业对科技改革投入资金呈线性增长. 但该企业投资偏好可能会受全球经济环境的影响,所以我认为该企业未来五年的科技改革投入资金可能会继续增长,但增长速度有可能会下降(答案不唯一,言之有理即可). ……………… (12 分)

7. 解:(1)由题知,锻炼时长在[20,30)的人数是锻炼时长在[40,50)的人数的 $\frac{3}{5}$ 倍,

故 $b=\frac{5}{3}a$. ……………………………… (2 分)

故 $\left(0.005+0.010+a+0.030+\frac{5}{3}a+0.010+0.005\right)\times10=1$,解得 $a=0.015$, $b=0.025$. …………… (4 分)

由题可知采用分层抽样的方法从锻炼时长在[20,30)中抽取 2 人,从锻炼时长在[30,40)中抽取 4 人.

故 X 的取值可能为 0,1,2, $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$, $P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$, $P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$. ……………… (6 分)

(2)由题意可得 $f(p)=C_3^2p^2(1-p)=3p^2(1-p)$,

故 $f'(p)=3p(-3p+2)$, ……………………… (8 分)

[难点]将求 $f(p)$ 的最大值问题转化为函数的最值问题.

令 $f'(p)=0$,则 $p=\frac{2}{3}$, …………………… (9 分)

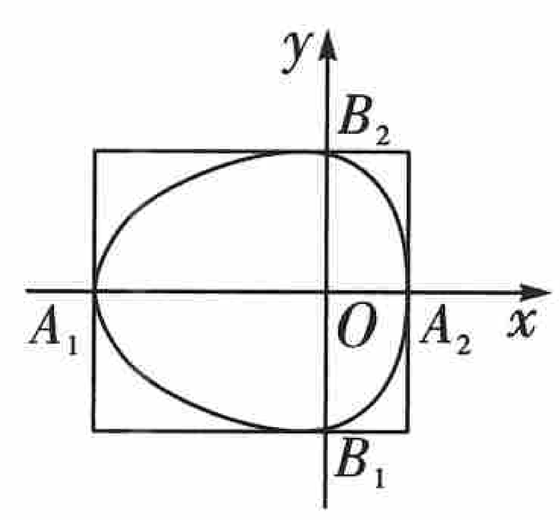
当 $p\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 时, $f'(p)>0$, $f(p)$ 在区间 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内单调递增,

当 $p\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 时, $f'(p)<0$, $f(p)$ 在区间 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 内单调递减,

所以当 $p=\frac{2}{3}$ 时, $f(p)$ 取得最大值. ……… (12 分)

新角度

1. D 如图所示,过曲线 E 与坐标轴的交点作相应坐标轴的垂线,以四条线的交点为顶点的四边形是边长为 6 的正方形,曲线 E 在正方形内,所以面积小于 36,**A 错误**;由图可知,曲线 E 的对称轴仅有 x 轴,当直线 l 斜率为 0 时,此时可能没有交点或无数个交点,**B 错误**; C_1 的左焦点坐标为 $(-\sqrt{7},0)$, C_2 的焦点坐标为 $(0,\pm\sqrt{5})$,结合椭圆的对称性可知, C_1 的焦点到 C_2 的焦点距离为 $\sqrt{(-\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{3}$,**C 错误**;若 $k=0$,此时可设直线 l 的方程为 $y=t$,易求得 A,B 坐标分别为 $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$, $\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$,故 AB 中点坐标为

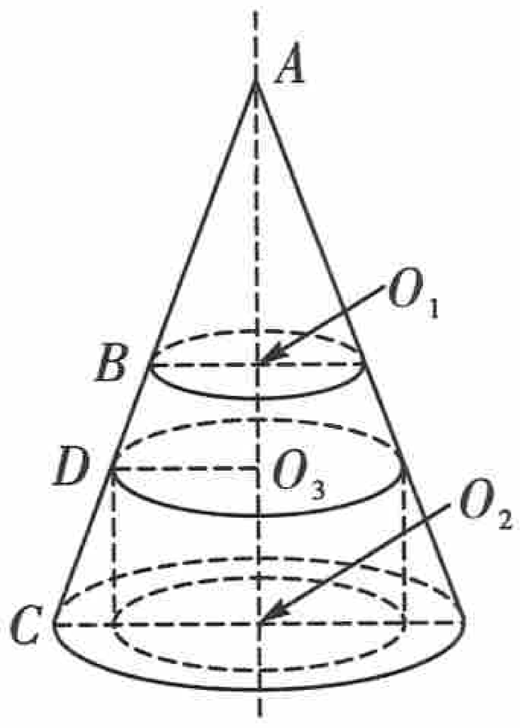


第 1 题解图

参考答案

$\left(-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3},t\right)$. 设 $P(x,y)$，故 $x=-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3}$①，$y=t$②，联立①②可得 $x^2+\frac{y^2}{9}=1(x<0)$，即此时点 P 的轨迹为 $x^2+\frac{y^2}{9}=1(x<0)$，**D 正确**.

2. B 如图所示，将圆台补形为圆锥，则圆锥底面半径 $CO_2=2$. 结合圆台的特征可知 $BO_1 /\!/ CO_2$，则 $\triangle AO_1B \backsim \triangle AO_2C$，则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BO_1}{CO_2}$，又圆台的母线长为 3，即 $BC=3$，则圆锥母线 AC 长 l 满足 $\frac{l-3}{l}=\frac{1}{2}$，解得 $l=6$，则圆锥的高



第 2 题解图

$AO_2=\sqrt{AC^2-CO_2^2}=4\sqrt{2}$，圆台高 $O_1O_2=\frac{1}{2}AO_2=2\sqrt{2}$.

结合图形可知，只有当圆柱内接于圆锥时，圆柱的体积最大，设此时圆柱高 O_3O_2 为 h，$h\in(0,2\sqrt{2}]$，结合圆柱的特征可知 $DO_3 /\!/ CO_2$，则 $\triangle AO_3D \backsim \triangle AO_2C$，则 $\frac{DO_3}{CO_2}=\frac{AO_3}{AO_2}$，设圆柱的半径为 r，则有 $\frac{r}{2}=\frac{4\sqrt{2}-h}{4\sqrt{2}}$，即 $r=\frac{4\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}}$，圆柱体积 $V=\pi r^2\cdot h=\pi\left(\frac{4\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}}\right)^2 h=\frac{\pi}{8}(h^3-8\sqrt{2}h^2+32h)$，$h\in(0,2\sqrt{2}]$，求导得 $V'=\frac{\pi}{8}(3h^2-16\sqrt{2}h+32)$，令 $V'=0$，解得 $h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $4\sqrt{2}$（舍去），则当 $h\in\left(0,\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ 时，$V'>0$，V 单调递增；当 $h\in\left(\frac{4\sqrt{2}}{3},2\sqrt{2}\right]$ 时，$V'<0$，V 单调递减，故当圆柱体积最大时，其高为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

3. 解：(1)①当 n 为奇数时，该三角形数表中"n 项对称数列"为"$1,2,\cdots,\frac{n+1}{2},\cdots,2,1$"，

其中前 $\frac{n+1}{2}$ 项为公差为 1 的等差数列，后 $\frac{n-1}{2}$ 项为公差为-1 的等差数列，

则 $b_n=2\times\frac{\frac{n+1}{2}\left(1+\frac{n+1}{2}\right)}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{4}$； …… (2 分)

②当 n 为偶数时，该三角形数表中"n 项对称数列"为"$1,2,\cdots,\frac{n}{2},\frac{n}{2},\cdots,2,1$"，

其中前 $\frac{n}{2}$ 项为公差为 1 的等差数列，后 $\frac{n}{2}$ 项为公差为-1 的等差数列，

则 $b_n=2\times\frac{\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)}{2}=\frac{n^2+2n}{4}$. ……………… (4 分)

综上可知，$b_n=\begin{cases}\frac{(n+1)^2}{4}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n^2+2n}{4}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………… (6 分)

(2) 结合(1)中$\{b_n\}$通项公式可得需分类讨论，当 m 为奇数时，$m+1$ 为偶数，

则 $\frac{b_{m+1}}{b_m}=\frac{\frac{(m+1)^2+2(m+1)}{4}}{\frac{(m+1)^2}{4}}=\frac{m+3}{m+1}=\frac{6}{5}$，解得 $m=9$；

……………………………………………… (9 分)

当 m 为偶数时，$m+1$ 为奇数，

则 $\frac{b_{m+1}}{b_m}=\frac{\frac{(m+1+1)^2}{4}}{\frac{m^2+2m}{4}}=\frac{m+2}{m}=\frac{6}{5}$，解得 $m=10$，

综上，$m=9$ 或 10. ………………………… (12 分)

4. 解：(1) 由题意知 $a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}+\frac{a_n}{2n-1}=\frac{a_{n+1}-1}{2}$①，

$n\geqslant2$ 时，$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}$，② ……… (2 分)

①-②可得：$\frac{a_n}{2n-1}=\frac{a_{n+1}-1}{2}-\frac{a_n-1}{2}=\frac{a_{n+1}-a_n}{2}$，化简得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n-1}(n\geqslant2)$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}$.

即 $\frac{a_{n+1}}{a_1}=2n+1$，又 $a_1=1$，则 $a_{n+1}=2n+1$，

所以 $a_n=2n-1$，……………………………… (5 分)

又因为 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=2n-1$. … (6 分)

(2) 结合题干及(1)中结论易得 $b_1=a_1=1$，$a_2=3$，$b_2=2$，

因为 $\ln b_n+\ln b_{n+2}=2\ln b_{n+1}$，所以 $b_n\cdot b_{n+2}=b_{n+1}^2$，…………………………………………………………（7 分）

所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，且公比为 $q=\frac{b_2}{b_1}=2$，

所以 $b_n=2^{n-1}$，$T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，……………（9 分）

所以 $T_n\cdot T_{n+2}=(2^n-1)(2^{n+2}-1)=2^{2n+2}-5\times2^n+1$，

又 $T_{n+1}^2=(2^{n+1}-1)^2=2^{2n+2}-4\times2^n+1$，$5\times2^n>4\times2^n$，

所以 $T_n\cdot T_{n+2}<T_{n+1}^2$ 得证. …………………（12 分）

5. 解：(1) 令 $f(x)=0$，即 $x^2-3x+2=0$，解得 $x=1$ 或 2，

由 $e>1$，可得 $a=1$，$e=2$，

[易错] 容易忽略双曲线中 $e>1$ 而致错.

又 $e=\frac{c}{a}=2$，得 $c=2$，$b^2=c^2-a^2=3$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ……（2 分）

设 $Q(x_1,y_1)(x_1\neq\pm1)$，则 $x_1^2-\frac{y_1^2}{3}=1$，$y_1^2=3(x_1^2-1)$，

易得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，

因为 $k_{QA}k_{QB}=\frac{y_1}{x_1+1}\cdot\frac{y_1}{x_1-1}=\frac{y_1^2}{x_1^2-1}=\frac{3(x_1^2-1)}{x_1^2-1}=3$.

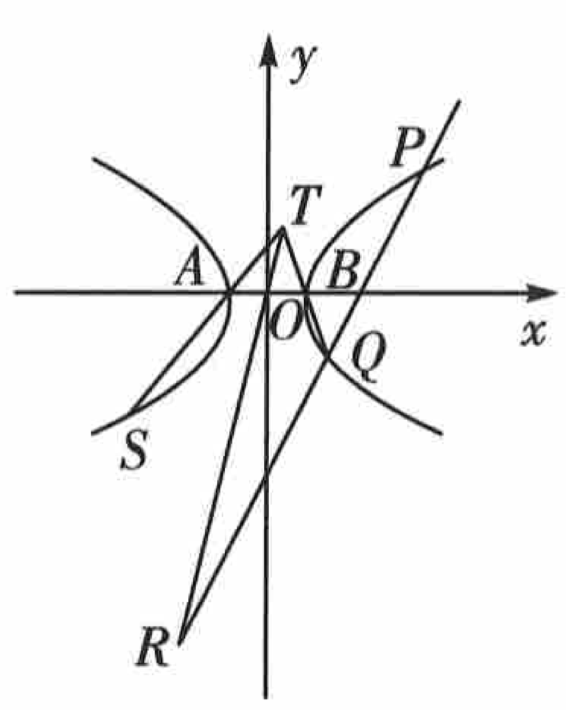
故两直线 QA，QB 斜率之积为定值 3. ………（5 分）

(2) 由题意得直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

如图所示，点 P，S 关于坐标原点对称，

结合双曲线的对称性，知 P，Q，S 三个点均在双曲线上，可设 $P(x_2,y_2)$，则 $S(-x_2,-y_2)$，$T(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，得 $(3-k^2)x^2-2kmx-(m^2+3)=0$，



第 5 题解图

因为直线 l 与双曲线有两个交点，故 $k\neq\pm\sqrt{3}$，$\Delta>0$，

所以 $m^2>k^2-3$，…………………………………（6 分）

所以 $x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-(m^2+3)}{3-k^2}$，

进而得 $y_1+y_2=\frac{6m}{3-k^2}$，$y_1y_2=\frac{3m^2-3k^2}{3-k^2}$，

由题意可知，$A(-1,0)$，$B(1,0)$，

由 T，S，A 三点共线可得，

$\frac{y_0}{x_0+1}=\frac{-y_2}{-x_2+1}$，即 $\frac{x_0+1}{y_0}=\frac{x_2-1}{y_2}$①，……………（8 分）

由 T，Q，B 三点共线可得 $\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{y_1}{x_1-1}$，

[难点] 结合三点共线，得 $k_{TB}=k_{QB}$ 列等式.

即 $\frac{x_0-1}{y_0}=\frac{x_1-1}{y_1}$②，

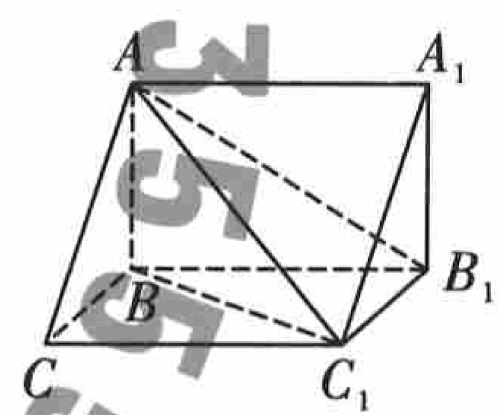
①+②可得 $\frac{2x_0}{y_0}=\frac{x_1-1}{y_1}+\frac{x_2-1}{y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-(y_1+y_2)}{y_1y_2}=\frac{-2}{m-k}$，…………………………………………（10 分）

所以直线 OT 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0}x=(k-m)x$，

联立 $\begin{cases}y=(k-m)x,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 解得 $x=-1$，

所以点 R 在直线 $x=-1$ 上. ……………（12 分）

6. 解：(1) 如图①，连接 BC_1，由 $BB_1\perp$ 平面 ABC，



第 6 题解图①

又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $BB_1\perp AB$，

因为 $\angle ABC=90°$，所以 $AB\perp BC$，又 $BB_1\cap BC=B$，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，

则 $\angle AC_1B$ 为 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成角 α，

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 得，$CC_1/\!/AA_1$，则 $\angle CC_1B$ 为 AA_1 与 BC_1 所成角 γ，

又由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 得，$CC_1/\!/BB_1$，则 $\angle AC_1C$ 为 AC_1 与 BB_1 所成角 β. ……………………（3 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$ 中，$\cos\angle AC_1B=\cos\alpha=\frac{BC_1}{AC_1}$，

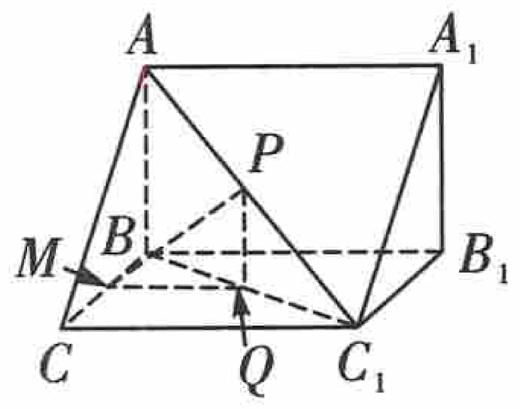
在 $\mathrm{Rt}\triangle BCC_1$ 中，$\cos\angle CC_1B=\cos\gamma=\frac{CC_1}{BC_1}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC_1$ 中，$\cos\angle AC_1C=\cos\beta=\frac{CC_1}{AC_1}$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{BC_1}{AC_1}=\dfrac{\dfrac{CC_1}{AC_1}}{\dfrac{CC_1}{BC_1}}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$,

即 $\cos\alpha=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. ………………………………（6 分）

(2) 如图②，过点 P 作 $PQ/\!/AB$，交 BC_1 于点 Q，



第 6 题解图②

结合(1)可得 $PQ\perp$ 平面 BCC_1B_1，

又 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $PQ\perp BC$，

作 $QM\perp BC$ 于点 M，连接 PM，

又 $PQ\cap QM=Q$，

所以 $BC\perp$ 平面 PMQ，

又 $PM\subset$ 平面 PMQ，

故 $BC\perp PM$，

故 PM 为点 P 到直线 BC 的距离. …………（8 分）

因为 $AB=BC=CC_1=2$，所以 $C_1B=2\sqrt{2}$，

设 $C_1Q=x(0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$，

由 $PQ/\!/AB$，易得 $\triangle PQC_1\backsim\triangle ABC_1$，则 $\dfrac{PQ}{AB}=\dfrac{C_1Q}{C_1B}$，

即 $\dfrac{PQ}{2}=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$，解得 $PQ=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，

在 $\triangle BCC_1$ 中，同理可得 $\dfrac{BQ}{BC_1}=\dfrac{QM}{CC_1}$，

得 $\dfrac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}}=\dfrac{QM}{2}$，得 $QM=\dfrac{2\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$，……………（10 分）

由 $PQ\perp$ 平面 BCC_1B_1 且 $QM\subset$ 平面 BCC_1B_1，

得 $PQ\perp QM$，

故 $PM=\sqrt{PQ^2+QM^2}=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(2\sqrt{2}-x)^2}{2}}=\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+4}=$

$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时，等号成立，

故点 P 到直线 BC_1 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$. ………

………………………………………………（12 分）

7. 解：(1) 如图①，取平面 AA_1D_1D 的中心 J，连接 OJ，

因为 $AN=\dfrac{2}{3}AA_1$，$DK=\dfrac{1}{3}DD_1$，

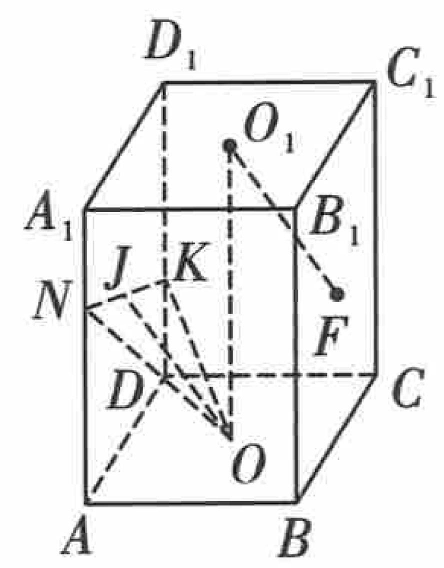
可得 $\dfrac{AN}{AA_1}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{DK}{DD_1}=\dfrac{1}{3}$，

故结合正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的结构特征可得直线 NK 过侧面 AA_1D_1D 的中心 J，…………（2 分）

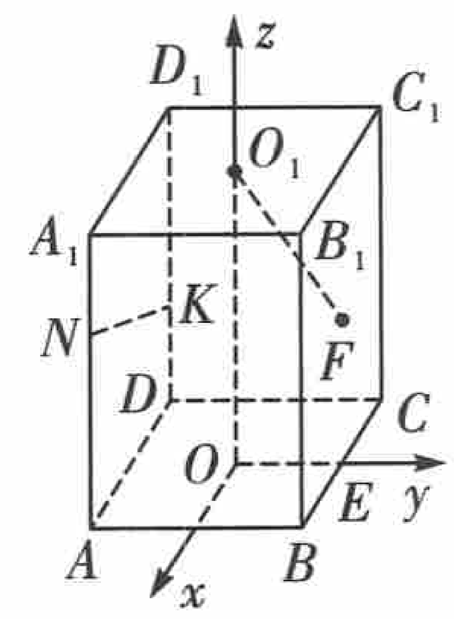
故由 J,O,F,O_1 分别为正四棱柱面的中心可得 $JO/\!/O_1F$，

又 $JO\subset$ 平面 NKO，$O_1F\not\subset$ 平面 NKO，

所以直线 $O_1F/\!/$ 平面 NKO. …………………（4 分）



第 7 题解图①



第 7 题解图②

(2) 取 BC 的中点 E，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OO_1}$ 的方向分别为 y 轴、z 轴的正方向，过点 O 作 OE 的垂线为 x 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $O_1(0,0,12)$，$F(0,4,6)$，$A(4,-4,0)$. ………（5 分）

故 $\overrightarrow{OO_1}=(0,0,12)$，

由 $OI=\lambda OO_1$，所以 $I(0,0,12\lambda)$，$\lambda\in(0,1]$，

又 $AN=\dfrac{2}{3}AA_1$，$DK=\dfrac{1}{3}DD_1$，

得 $N(4,-4,8)$，$K(-4,-4,4)$，

所以 $\overrightarrow{NK}=(-8,0,-4)$，$\overrightarrow{IK}=(-4,-4,4-12\lambda)$. ……

…………………………………………………（7 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 INK 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NK}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{IK}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-8x-4z=0,\\ -4x-4y+(4-12\lambda)z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,6\lambda-3,-2)$，

又 $O_1(0,0,12)$，$F(0,4,6)$，故 $\overrightarrow{O_1F}=(0,4,-6)$，…

…………………………………………………（9 分）

记直线 O_1F 与平面 INK 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{O_1F},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{O_1F}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{O_1F}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$

[难点] 直线与平面所成角的范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故其对应正弦值为正.

$=\dfrac{|24\lambda|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{1+(6\lambda-3)^2+(-2)^2}}$

$=\dfrac{12}{\sqrt{13}\sqrt{\dfrac{14}{\lambda^2}-\dfrac{36}{\lambda}+36}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}\sqrt{14\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{9}{7}\right)^2+\dfrac{90}{7}}}$，

参考答案

又 $\lambda\in(0,1]$，故当 $\lambda=\frac{7}{9}$ 时 $\sin\theta$ 取最大值，

$(\sin\theta)_{\max}=\frac{12}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{90}{7}}}=\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{65}}$，

所以直线 O_1F 与平面 INK 所成角正弦值最大时 λ 为 $\frac{7}{9}$. ……………………………………（12 分）

8. 解：(1) 由 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

因为 $f(0)=2$，所以 $f(0)=c=2$，

又因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(1-x)$ 成立，

由 $f(1-x)=a(1-x)^2+b(1-x)+2=ax^2-(2a+b)x+a+b+2=ax^2+bx+2$，

所以 $\begin{cases}c=2,\\-(2a+b)=b,\\a+b=0,\end{cases}$ 解得 $a=-b$，……………（2 分）

又因为 $\frac{b}{2}$ 为 a,c 的等差中项，即 $a+c=b$，

所以 $a=-1,b=1,c=2$，

所以 $f(x)=-x^2+x+2$. ……………………………（4 分）

(2) 由 (1) 得 $f(x)=-x^2+x+2$，

原不等式化为 $e^x(\sin x+\cos x)>1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2=(x+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x\right)$.

当 $x\in\left[2,\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，$e^x(\sin x+\cos x)>0$，$(x+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x\right)\leqslant0$，显然成立；……………………（6 分）

当 $x\in(0,2)$ 时，因为 $e^x>x+1>0$，

所以只需证 $\sin x+\cos x>1-\frac{1}{2}x$.

令 $g(x)=\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x-1$，$x\in(0,2)$，

结合辅助角公式可得 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}x-1$，

$g'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$. ……………………（8 分）

且当 $x\in(0,2)$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},2+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以结合余弦函数的图象可得存在唯一 $x_0\in(0,2)$ 使 $g'(x_0)=0$，

且 $x_0\in(0,x_0)$ 时，$g'(x_0)>0$，$x_0\in(x_0,2)$ 时，$g'(x_0)<0$，

即 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内单调递增，在区间 $(x_0,2)$ 内单调递减，……………………………………（10 分）

又 $g(0)=0$，$g(2)=\sqrt{2}\sin\left(2+\frac{\pi}{4}\right)>0$，

所以 $g(x)>0$，即 $\sin x+\cos x>1-\frac{1}{2}x>0$.

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$e^x(\sin x+\cos x)>(x+1)\left(1-\frac{1}{2}x\right)$，

综上不等式得证. ……………………………（12 分）

9. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $f(x)\geqslant2$ 恒成立时，即 $k\geqslant x(2-\ln x)$ 恒成立，

令 $g(x)=x(2-\ln x)$，则 $k\geqslant g(x)_{\max}$，$g'(x)=1-\ln x$，

……………………………………………（1 分）

当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=e$，则 $k\geqslant e$，即 k 的取值范围为 $[e,+\infty)$. ……………………………………（3 分）

(2) 由 (1) 可知 $k\in[e,+\infty)$ 时 $f(x)\geqslant2$ 恒成立，

故 $k<e$，才有可能使点 $(x_1,2)$，$(x_2,2)$ $(x_1\neq x_2)$ 为函数 $f(x)$ 图象上的两个点，

又 $f'(x)=\frac{x-k}{x^2}$，

当 $k\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)=2$ 至多只有一个解，不合题意，

故 $0<k<e$，

当 $x\in(0,k)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(k,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(k)=\ln k+1<2$，……（5 分）

可满足点 $(x_1,2)$，$(x_2,2)$ $(x_1\neq x_2)$ 为函数 $f(x)$ 图象上的两个点，

即 $f(x)=2$ 有两个解 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，

不妨设 $0<x_1<k<x_2$，

则 $f(x_1)-2=\frac{k}{x_1}+\ln x_1-2=0$，

$f(x_2)-2=\frac{k}{x_2}+\ln x_2-2=0$，

两式相减得 $\frac{k(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\ln x_2-\ln x_1$，

即 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_1x_2}{k}$，

下证：$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即证 $\frac{(x_2-x_1)^2}{x_1x_2}>$

参考答案

$(\ln x_2-\ln x_1)^2$，即证$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-\left(\ln\frac{x_2}{x_1}\right)^2-2>0$，

令$t=\frac{x_2}{x_1}$，则$t\in(1,+\infty)$，令$h(t)=t+\frac{1}{t}-(\ln t)^2-2$，

[难点]利用换元将关于x_1,x_2的不等式转化为关于t的函数求解.

则$h'(t)=1-\frac{1}{t^2}-2(\ln t)\frac{1}{t}=\frac{t^2-2t\ln t-1}{t^2}$，…（6分）

令$\varphi(t)=t^2-2t\ln t-1$，

则$\varphi'(t)=2t-2(1+\ln t)=2(t-1-\ln t)$，

令$m(t)=t-1-\ln t$，则$m'(t)=\frac{t-1}{t}>0$，

故$m(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$m(t)>m(1)=0$，则$\varphi'(t)=2m(t)>0$，

故$\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，则$h'(t)=\frac{\varphi(t)}{t^2}>0$，

故$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$h(t)>h(1)=0$，故$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以由$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_1x_2}{k}$得$\frac{x_1x_2}{k}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以$\sqrt{x_1x_2}>k$. ……………………………（8分）

(3)$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}(x>0)$，

由$\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}=k$，整理得$kx^2-x+k=0(x>0)$，

因为$kx^2-x+k=0$有两个不同的正解m,n，

则$m+n=\frac{1}{k}>0$，$mn=1>0$得$k>0$.

且$\Delta=1-4k^2>0$得$0<k<\frac{1}{2}$.

所以$AB=|n-m|=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{\frac{1}{k^2}-4}$，……

……………………………………（10分）

又$|f'(m)|=|k|$，故底面圆的半径为$|k|$，

则母线长为AB的圆柱体积$V=\pi k^2\cdot\sqrt{\frac{1}{k^2}-4}=\pi\sqrt{k^2-4k^4}$，

因为$0<k<\frac{1}{2}$，所以$0<k^2<\frac{1}{4}$，

令$k^2=t$，则$0<t<\frac{1}{4}$，即$V=\pi\sqrt{t-4t^2}=\pi\sqrt{-\left(2t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}$，

当且仅当$t=k^2=\frac{1}{8}$时，$V_{\max}=\frac{\pi}{4}$.

故圆柱体积的最大值为$\frac{\pi}{4}$. ………………（12分）

新题型

1. x轴；$-\frac{1}{3}e^{x-2}$　若函数$f(x)=\frac{1}{3}e^{x-2}$的图象与$g(x)$的图象关于x轴对称，则函数$g(x)=-\frac{1}{3}e^{x-2}$. 其他参考答案：若函数$f(x)=\frac{1}{3}e^{x-2}$的图象与$g(x)$的图象关于y轴对称，则函数$g(x)=\frac{1}{3}e^{-x-2}$；若函数$f(x)=\frac{1}{3}e^{x-2}$的图象与$g(x)$的图象关于直线$y=x$对称，即函数$g(x)$为函数$f(x)$的反函数，令$y=\frac{1}{3}e^{x-2}$，则$x=\ln(3y)+2$，故函数$y=\frac{1}{3}e^{x-2}$的反函数为$y=\ln(3x)+2,x>0$，即函数$g(x)=\ln(3x)+2,x>0$.

2. ①，1或③，$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　命题①是假命题，如当$q=1$且$a_1=1$时，T_n有最大值1，此时$a_n=1$. 命题②是真命题，当$q<-1$时，等比数列$\{a_n\}$的各项正负交替，T_n没有最大值；命题③是假命题，如当$q=-\frac{1}{2}$且$a_1=1$时，T_n有最大值1，此时$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；命题④是真命题，如当$q=\frac{1}{3}$且$a_1=2$时，$T_n$有最大值2，此时$a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3. (3,4)（答案不唯一，满足$2m+n=10$的一组正实数对即可）

已知x,y,m,n为正实数且$2x+y=1$，则$\frac{2m^2}{x}+\frac{n^2}{y}=\left(\frac{2m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\right)(2x+y)=\frac{2m^2y}{x}+\frac{2n^2x}{y}+4m^2+n^2\geqslant 2\sqrt{\frac{2m^2y}{x}\cdot\frac{2n^2x}{y}}+4m^2+n^2=(2m+n)^2$，由$\frac{2m^2}{x}+\frac{n^2}{y}$的最小值为100，可知$(2m+n)^2=100$，则$2m+n=10$，当且仅当$\frac{2m^2y}{x}=\frac{2n^2x}{y}$且$2x+y=1,2m+n=10$时等号成立.

故满足条件的一组正实数对(m,n)为$(3,4)$.(答案不唯一,满足 $2m+n=10$ 的一组实数对即可).

4. $a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-8}$(答案不唯一,满足 $a_n=a_8q^{n-8}$,$a_8>1$,$0<q<\frac{1}{a_8}$即可)

由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_2}{a_1}$可知数列$\{a_n\}$为等比数列,又 $a_n>0$,则数列$\{a_n\}$为无穷正项等比数列. 又当且仅当 $n=8$ 时,$T_n=a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_n$ 取得最大值,所以等比数列$\{a_n\}$的公比需满足 $0<q<1$,且 $a_8>1$,$0<a_9<1$,可取 $a_8=2$,$q=\frac{1}{3}$,此时数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-8}$(答案不唯一,满足 $a_n=a_8q^{n-8}$,$a_8>1$,$0<q<\frac{1}{a_8}$即可).

5. $\frac{3\pi}{8}$(答案不唯一,满足 $\theta=\frac{4k+3}{8}\pi(k\in\mathbf{Z})$即可)

根据基本不等式和余弦函数的性质可知 $e^x+e^{-x}\geqslant 2\geqslant 2\cos\frac{\pi x}{2}$,当且仅当 $x=0$ 时 $e^x+e^{-x}=2=2\cos\frac{\pi x}{2}$,因为 $e^x+e^{-x}\leqslant\frac{\sin\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{\cos\theta}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\leqslant 2\cos\frac{\pi x}{2}$,所以 $\frac{\sin\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{\cos\theta}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}=2$,即 $\sin\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$,得 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$,所以$\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=(2k+1)\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\theta=\frac{4k+3}{8}\pi(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=0$ 时,$\theta=\frac{3\pi}{8}$,故满足要求的 θ 的一个值为$\frac{3\pi}{8}$.(答案不唯一,满足 $\theta=\frac{4k+3}{8}\pi(k\in\mathbf{Z})$即可)

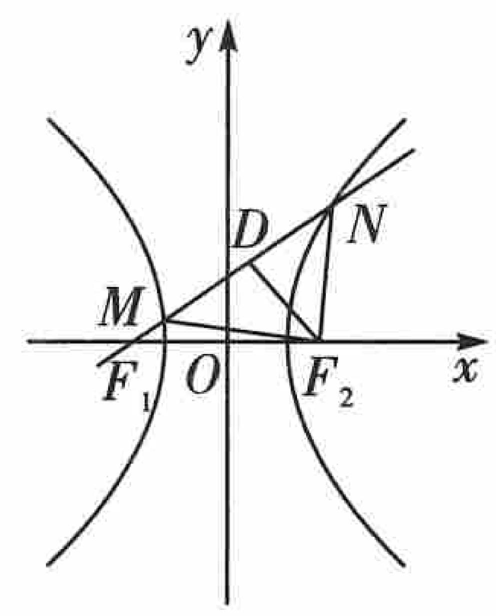
6. $x^2-y^2=1$(答案不唯一,满足$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$即可)

如图,取 MN 的中点为 D,连接 F_2D,设 $|MF_2|=|NF_2|=t$,$t>2a$,因为$|MF_2|-|MF_1|=2a$,所以$|MF_1|=$

[易错]利用双曲线的定义时,容易忽略去绝对值后的正负号.

$t-2a$. 因为 $|NF_1|-|NF_2|=2a$,所以 $|NF_1|=t+2a$.

所以$|MN|=|NF_1|-|MF_1|=4a$. 因为 D 是 MN 的中点,所以 $|MD|=|ND|=2a$,$|F_1D|=|MF_1|+|MD|=t$,又 $|MF_2|=|NF_2|$,D 为 MN 的中点,所以 $F_2D\perp MN$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2D$ 中,



第 6 题解图

$|F_2D|=\sqrt{4c^2-t^2}$;在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_2D$ 中,$|F_2D|=\sqrt{t^2-4a^2}$,所以$\sqrt{4c^2-t^2}=\sqrt{t^2-4a^2}$,即 $t^2=2a^2+2c^2$. 所以$|F_2D|=\sqrt{2c^2-2a^2}$,$|F_1D|=t=\sqrt{2a^2+2c^2}$. 因为直线 l 的倾斜角为 30°,所以 $\tan\angle DF_1F_2=\frac{|F_2D|}{|F_1D|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{3}$,$c^2=2a^2$,故 $b^2=c^2-a^2=a^2$,则双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$,故双曲线 C 的一个标准方程为 $x^2-y^2=1$.(答案不唯一,满足$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m}=1$$(m>0)$即可)

7. 解:选择条件①:(1)$b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin(A+C)$,

即 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$,

由正弦定理可得 $\sin B\sin\frac{B+C}{2}=\sin A\sin B$, …(2 分)

因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B\neq 0$,故 $\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$,

又 $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{\pi-A}{2}=\cos\frac{A}{2}$,从而 $\cos\frac{A}{2}=\sin A$,

所以 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, ……………… (4 分)

因为 $0<A<\pi$,所以 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$,则 $\cos\frac{A}{2}>0$,

从而 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,故$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$,$A=\frac{\pi}{3}$. ………… (6 分)

(2)如图,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

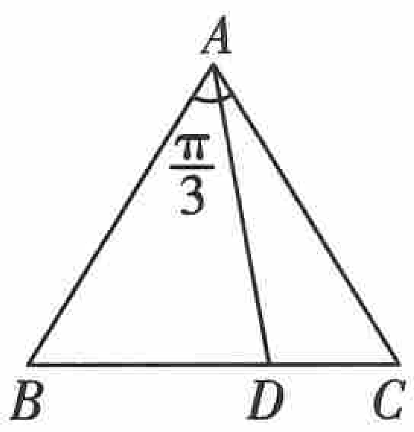
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, ……………………………… (7 分)

则 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,故 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{3}\sqrt{c^2+4b^2+4cb\cos A}$.

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,所以结合(1)可知

$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,解得 $bc=8$, …………… (10 分)

所以 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{3}\sqrt{c^2+4b^2+16}\geq\frac{1}{3}\sqrt{4bc+16}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $c=2b=4$ 时,等号成立,



第 7 题解图

故 AD 的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ……………………… (12 分)

选择条件②:(1)$(\tan C-\sqrt{3})b^2=(\tan C+\sqrt{3})(c^2-a^2)$,

即 $b^2\tan C-\sqrt{3}b^2=c^2\tan C-a^2\tan C+\sqrt{3}c^2-\sqrt{3}a^2$,

$c^2\tan C-a^2\tan C-b^2\tan C+\sqrt{3}c^2-\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2=0$, ………………………………………………………… (2 分)

等式两边同时减 $2\sqrt{3}b^2$,可得 $c^2\tan C-a^2\tan C-b^2\tan C+\sqrt{3}c^2-\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2=-2\sqrt{3}b^2$,

则有$(c^2-a^2-b^2)(\tan C+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}b^2$,

即$(a^2+b^2-c^2)(\tan C+\sqrt{3})=2\sqrt{3}b^2$, ……… (4 分)

等式两边同时乘以 $\cos C$,可得$(a^2+b^2-c^2)(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=2\sqrt{3}b^2\cos C$,

结合余弦定理得 $2ab\cos C(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=2\sqrt{3}b^2\cos C$,

则有 $a(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=\sqrt{3}b$. …………… (5 分)

由正弦定理可得 $\sin A(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=\sqrt{3}\sin B$,

$\sin A(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=\sqrt{3}\sin(A+C)$,

化简可得 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\cos A\sin C$,

因为 $0<C<\pi$,所以 $\sin C\neq0$,

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,$\tan A=\sqrt{3}$,

又因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………… (6 分)

(2)后同选择条件①. ……………………… (12 分)

选择条件③:(1)$\frac{a}{\cos(B+C)\cos\frac{5\pi}{6}}=\frac{c}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$,

即 $a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=c\cos\frac{5\pi}{6}\cos(B+C)$,

$2a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2c\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(\pi-A)$,

$a\sin C=\sqrt{3}c\cos A$, ………………………… (2 分)

由正弦定理可得 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos A$,

因为 $0<C<\pi$,所以 $\sin C\neq0$,

则 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,$\tan A=\sqrt{3}$, …………… (5 分)

又因为 $0<A<\pi$,故 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………… (6 分)

(2)后同选择条件①. …………………… (12 分)

8. 解:(1)由四边形 $ABCD$ 为平行四边形可知 $AD//BC$,又 $AD\not\subset$平面 $BCEF$,$BC\subset$平面 $BCEF$,所以 $AD//$平面 $BCEF$. ……………………………… (2 分)

又平面 $BCEF\cap$平面 $PAD=EF$,

所以 $AD//EF$,又 $AD\neq EF$,

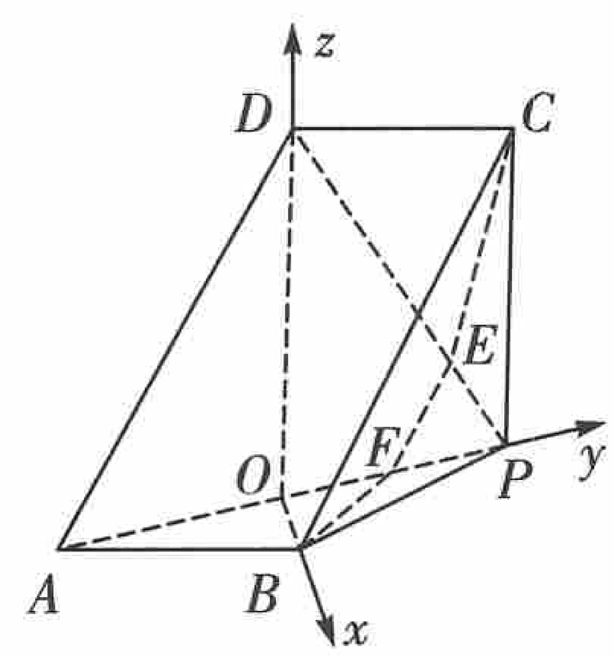
所以四边形 $ADEF$ 为梯形. ………………… (4 分)

(2)**选择条件①②:**取 PA 中点 O,连接 OB,OD.

由 $AD=AP=PD=4$,可知$\triangle PAD$ 为等边三角形.

又因为 O 为 PA 中点,所以 $OD\perp PA$, …… (6 分)

又因为二面角 $B-AF-E$ 为 $90°$,即平面 $PAD\perp$平面 PAB,



第 8 题解图①

又平面 $PAD\cap$平面 $PAB=PA$,$OD\subset$平面 PAD,且 $OD\perp PA$,

所以 $OD\perp$平面 PAB, ……………………… (7 分)

又因为 $BA=BP$,所以 $OB\perp OP$,则 OB,OP,OD 两两垂直.

故以 O 为坐标原点,分别以 OB,OP,OD 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图①所示,

则 $O(0,0,0)$,$A(0,-2,0)$,$D(0,0,2\sqrt{3})$,$B(3,0,0)$,$F(0,1,0)$.

$\overrightarrow{BF}=(-3,1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$, ………………………………………………………… (8 分)

由 $AP=4PF$,结合(1)中 $AD//EF$ 可知 $FE=\frac{1}{4}AD$,

则 $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, …………… (9 分)

设平面 $BCEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-3x_1+y_1=0,\\ \frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$

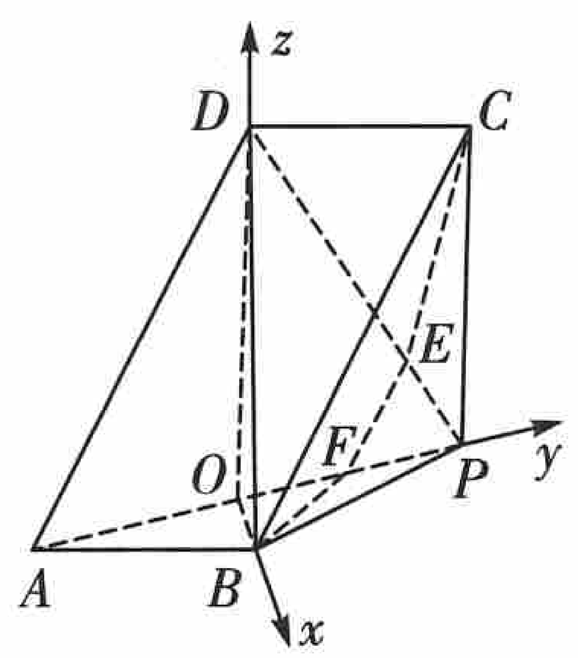
令 $z_1=-\sqrt{3}$,则 $y_1=3,x_1=1$,故 $\boldsymbol{n}=(1,3,-\sqrt{3})$.

设直线 AB 与平面 $BCEF$ 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{13}$,

故直线 AB 与平面 $BCEF$ 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$. ………………………………………………… (12 分)

选择条件②③:如图②所示,取 PA 中点 O,连接 OB,OD,BD.



第 8 题解图②

由 $AD=AP=PD=4$,可知$\triangle PAD$ 为等边三角形.

又因为 O 为 PA 中点,

所以 $OD\perp PA$,且 $OD=2\sqrt{3}$.

又因为 $BA=BP=\sqrt{13}$,$OA=2$,得 $OB\perp PA$ 且 $OB=3$, ……………………………………………………… (6 分)

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理可得 $BD=\sqrt{BA^2+AD^2-2BA\cdot AD\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{21}$,

所以有 $BD^2=OB^2+OD^2$,则 $OD\perp OB$.

所以 OB,OP,OD 三条直线两两垂直. …… (7 分)

后同选择条件①②. ……………………… (12 分)

选择条件①③:

如图②所示,取 PA 中点 O,连接 OB,OD,BD.

在$\triangle PAB$ 中,因为 $BA=BP=\sqrt{13}$,O 为 PA 的中点,

所以 $BO\perp PA$,且 $AO=2,BO=3$.

又因为二面角 $B-AF-E$ 为 90°,即平面 $PAD\perp$平面 PAB,

又平面 $PAD\cap$平面 $PAB=PA$,$BO\subset$平面 PAB,且 $BO\perp PA$,

所以 $BO\perp$平面 PAD,$BO\perp DO$. …………… (6 分)

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理可得 $BD=\sqrt{BA^2+AD^2-2BA\cdot AD\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{21}$,

可得在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中,$DO=\sqrt{BD^2-BO^2}=2\sqrt{3}$,

又因为 $AO=2,AD=4,AD^2=AO^2+DO^2$,

所以 $OD\perp OA$.

所以 OB,OP,OD 三条直线两两垂直. …… (7 分)

后同选择条件①②. ……………………… (12 分)

理科综合·生物

新素材

1. B 病毒主要由核酸和蛋白质外壳组成,其中核酸为 DNA 或 RNA 中的一种,不会既含 DNA 也含 RNA,**A 错误**;由“该病毒能复制自己的 DNA”可知,该病毒为 **DNA 病毒**,其遗传物质为 DNA,不能进行逆转录过程,**B 正确**;由题意可知,阿斯加德古菌属于原核生物,没有细胞核,**C 错误**;病毒没有细胞结构,不能独立合成自身的蛋白质,**D 错误**。

2. D 环境条件可影响群落演替的速度和方向,因此不同气候条件下热带森林群落发生演替的方向可能不同,**A 正确**;雷击致死的树木会被分解者分解,其固定在有机物中的碳可通过分解者的呼吸作用转变为 CO_2,从而回归大气,**B 正确**;由题意可知,除豆科、大戟科和皂科植物外,其他树种在雷击下几乎都会死亡,因此若某地区雷击频率过高,可造成该地区的物种丰富度降低,导致生态系统的抵抗力稳定性降低,**C 正确**;突变具有**不定向性**,雷击只是对存活率高的大戟科和皂科植物进行定向选择,不能诱导其发生定向突变,**D 错误**。

3. C Thp9 基因是野生玉米中的变异基因,是由碱基对的替换、缺失或增添导致的基因突变的结果,**A 正确**;由题意可知,编码天冬酰胺合成酶的 Thp9 基因是控制玉米高蛋白品质形成的关键基因,说明该基因通过控制酶的合成来控制代谢过程,进而控制生物体的性状,**B 正确**;**变异**(包括基因突变和基因重组)能为生物的进化提供原材料,**C 错误**;由题意可知,Thp9 基因是控制玉米氮素高效利用的关键基因,该基因的成功克隆有望减少化肥的施用,有利于保护生态环境,**D 正确**。

4. B 突触小泡是包裹神经递质的囊泡,由题意可知,外泌体也是一种囊泡,因此两者可能具有相似的结构和形成方式,**A 正确**;巨噬细胞是一种吞噬细胞,