机密 ★ 启用前 **姓名________准考证号___________**

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学风向卷（二）

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x|x\le m\}$，$N=\left\{x|y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}\right\}$.若 $M\cup N=\mathbf{R}$，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$[-1，+\infty)$　　B．$[4，+\infty)$　　C．$(-\infty，-1]$　　D．$(-\infty，4]$

2．设 i 为虚数单位，复数 z_0 在复平面内对应的点为 $Z_0(1，2)$，且 $z_0\cdot z=3+i$，则$|z|=$(　　)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3．已知$\left(a^2+\frac{2}{a}\right)^n$的展开式中最后三项的二项式系数之和为 16，则展开式中 a^4 的系数为(　　)

A．20

B．40

C．60

D．80

4．某新能源汽车生产公司，为了研究某生产环节中两个变量 x，y 之间的相关关系，统计样本数据得到如下表格：

x_i	20	23	25	27	30
y_i	2	2.4	3	3	4.6

由表格中的数据可以得到 y 与 x 的经验回归方程为$y=\frac{1}{4}x+a$，据此计算，下列选项中残差的绝对值最小的样本数据是(　　)

A．(30，4.6)

B．(27，3)

C．(25，3)

D．(23，2.4)

5．已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且 a_2 为 a_1，a_3+1 的等比中项，则数列$\{a_n\}$的前 10 项和为(　　)

A．88

B．108

C．130

D．154

6．已知 $\alpha\in(0，\pi)$，且 $3\cos 2\alpha+11=16\cos\alpha$，则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

A．$-\frac{4\sqrt{5}}{9}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{9}$　　C．$-\frac{2\sqrt{5}}{9}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{9}$

7．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，且$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$的最大值为(　　)

A．$-\sqrt{3}+4$

B．$\sqrt{3}+4$

C．$2\sqrt{3}-2$

D．$2\sqrt{3}+2$

8．已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点，经过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，D 为线段 AB 的中点，且 $F_1D\perp l$，$4|F_2B|=|AB|$，则双曲线 C 的离心率为(　　)

A．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D．2

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．下列不等式成立的是(　　)

A．$\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$

B．$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\pi^{\frac{1}{2}}$

C．$\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$

D．$\log_4 3<\log_6 5$

10．记 T 为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期，且 $T\in(2，3)$，函数在 $x=\frac{3\pi}{2}$处取得最大值 3，则(　　)

A．$b=3$

B．$f(x)$的最小正周期为$\frac{4\pi}{5}$

C．$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$上单调递减

D．将函数 $f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后与函数 $y=-\sin\frac{5}{2}x$ 的图像重合

11．已知圆 C：$x^2+y^2-2x\cos\theta-2y\sin\theta-3=0$，$\theta\in\mathbf{R}$，则(　　)

A．圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相内切

B．直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-3=0(\alpha\in\mathbf{R})$与圆 C 相离

C．圆 C 上到直线 $x+y=0$ 的距离等于 2 的点只有两个

D．过直线 $x+y=4\sqrt{2}$上任一点 M 作圆 C 的切线，切点分别为 E，F，则四边形 $MECF$ 面积的最小值为 $2\sqrt{5}$

12．已知球 O 的表面积为 36π，正四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点均在球 O 的表面上，设 $AB=a$，则(　　)

A．当 $a=3\sqrt{2}$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积为 $18\sqrt{3}$

B．当 $a=3\sqrt{2}$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$

C．当 $a\in[\sqrt{2}，3\sqrt{2}]$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最小值为 $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D．当 $a\in[\sqrt{2}，3\sqrt{2}]$时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最大值为 18

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若随机变量 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$，且 $P(X\geq 5)=P(X\leq -1)=0.2$，则 $P(-1<X<2)=$________.

14．已知曲线 $y=f(x)=(x-a)e^x$ 在 $x=-1$ 处的切线与直线 $y=-2x+1$ 垂直，则实数 $a=$________.

15．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 B_1C_1 的中点，N 为底面 $ABCD$ 上一动点，且直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角为$\frac{\pi}{3}$，则动点 N 的轨迹的长度为________.

16．已知函数 $f(x)$的定义域为$[0，+\infty)$，且 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x\in[0,1),\\ \log_2(3-x),x\in[1,2),\\ 2f(x-2),x\in[2,+\infty),\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)-2^{\frac{x-1}{2}}$在区间$[0，a]$内的所有零点为 $x_i(i=1，2，3，…，n)$．若$\sum_{i=1}^{n}x_i=16$，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(10 分)已知等差数列$\{a_n\}$，$3a_2=a_4+2$，$a_2a_3=a_8$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $a_{n+1}-a_n>0$，且数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1$，$b_{n+1}=\begin{cases} a_n, n为奇数, \\ 2^n-b_n, n为偶数, \end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前 14 项的和.

18．(12 分)已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $B=2C$，$C\neq A$.

(1)证明：$b^2-c^2=ac$；

(2)若 AC 边上的中线 $BD=\sqrt{2}a$，求 $\tan\angle ABC$.

19．(12 分)“坚持‘五育’并举，全面发展素质教育，强化体育锻炼”是我们现阶段教育必须坚持

的．某高中学校鼓励学生自发组织各项体育比赛活动，甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛，规定：每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局，首先获得 5 分者获胜，比赛结束．假设每局比赛甲获胜的概率都是$\frac{3}{5}$.

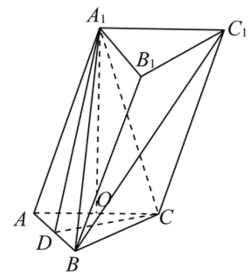
(1)求比赛结束时恰好打了 6 局的概率；

(2)若甲以 3∶1 的比分领先时，记 X 表示到比赛结束时还需要比赛的局数，求 X 的分布列及数学期望．

20．(12 分)已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为正三角形，A_1 在底面 ABC 上的射影 O 恰好为棱 AC 的中点，且 $A_1O=3$，直线 A_1B 与平面 A_1C_1CA 所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

(1)在棱 AB 上是否存在一点 D，使得 BC_1∥平面 A_1CD?

(2)若 D 为棱 AB 的中点，求平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角的余弦值．



21．(12 分)已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为 6，且经过点$(-\sqrt{6}$，

2)，椭圆的左顶点到抛物线Γ：$y^2=2px(p>0)$的准线的距离为2，且抛物线的准线和椭圆相交．

(1)求椭圆 C 和抛物线Γ的方程．

(2)斜率为 $k(k\neq0)$的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，与抛物线Γ交于 A，B 两点，当$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-4$时，在 x 轴上是否存在定点 T，使得∠MTN 的平分线恰好为 x 轴？若存在，求出定点 T 的坐标；若不存在，请说明理由．

22．(12 分)已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，$g(x)=\frac{lnx}{x}$.

(1)求证：函数 $f(x)$与函数 $g(x)$具有相同的最大值，并分别指出取得最大值时 x 的值；

(2)若方程 $f(x)=a$ 和 $g(x)=a$ 共有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，求证：x_1，x_2，x_3 成等比数列．