

# 非结构动网格计算方法

——及其在包含运动界面的流场模拟中的应用

刘 君 白晓征 郭 正 著

国防科技大学出版社

·长沙·

### 图书在版编目(CIP)数据

非结构动网格计算方法——及其在包含运动界面的流场模拟中的应用/刘君, 白晓征, 郭正著. —长沙: 国防科技大学出版社, 2009. 6

ISBN 978 - 7 - 81099 - 666 - 2

I. 非… II. ①刘… ②白… ③郭… III. 非定常流动—研究 IV. O357.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 093942 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

<http://www.gfkdcbs.com>

责任编辑:徐 飞 责任校对:唐卫藏

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

\*

开本:787×960 1/16 印张:16.25 字数:301 千

2009 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1 - 1000 册

ISBN 978 - 7 - 81099 - 666 - 2

定价:28.00 元

# 前 言

本书所讨论的非定常流动主要包括两大类：一是流场中有多个飞行体，它们之间有相对运动，称为多体分离问题；二是物体表面的变形对流场影响不容忽视的情况，称为物体变形引起的流固耦合问题。这两类问题共同特点是包含有相对运动边界的非定常流动。随着 CFD 不断完善和发展，它一方面成为流体研究和工程研制中不可或缺的分析与设计工具，在工业领域应用越来越广泛，另一方面应用过程中遇到的一些新问题又给 CFD 学科自身发展提出新的研究课题。含有运动边界的非定常流动现象在进行数值模拟时，在控制方程、网格、离散方法等方面有其特别之处。作者所在课题组从 1997 年开始这一方向研究，发展了以非结构动网格技术为基础的计算方法和相关模拟软件。

本书是对这些年研究工作的系统整理，主要包括：

多体动力学定义、应用、流动特点，计算模拟难点；ALE 有限体积方法描述的控制方程；有限体积方法的分析理论；网格变形引起的几何守恒律；实现非结构网格变形的弹簧近似方法；网格变形结合局部重构模拟多体分离过程的策略；网格重构判据、重构条件、高效率寻点算法；局部网格重构以后，网格之间流场信息传递方法；流场与刚体动力学或结构动力学耦合求解过程；针对“接触/间断”问题，提出“虚拟网格通气”处理技术。书中提供了以上计算方法的验证算例，介绍了在多体分离、阀门动态特性等工程问题研究中的应用情况，目前正在推广到爆炸和气动弹性等问题的研究中，书

中也给出初步的研究成果。

本书主要对象是完成相关理论学习的研究生和正在进行运动界面应用问题研究的科研人员。目前国内细致论述有限体积方法的计算流体力学的教科书不多,涉及非结构动网格技术的专门著作尤为甚少;以上计算方法应用于大量工程项目,本书对其中研究以后有新认识的典型问题进行了总结,提炼出有指导意义的结论,对相关型号研究人员有一定参考意义。

书中计算方法研究工作先后得到一项国防预研基金和三项国家自然科学基金的资助。国家自然科学基金的项目名称、编号、起止时间分别为:(1)“非圆截面弹身的定常/非定常气动特性数值模拟研究”,编号 A10176037(中物院的联合基金项目——NASF),2002年1月至2004年12月;(2)“多体相对运动非定常流动数值模拟和实验研究”,编号 90505003,2006年1月至2008年12月;(3)“运动激波与运动物体相互作用激波管实验”,编号:10602064(青年基金项目),2007年1月至2009年12月。

选择非结构动网格技术作为研究方向时,我还属于中国空气动力研究与发展中心张涵信院士领导的研究群体,大家坦诚交流、激发灵感、共克难关,使我至今受益匪浅。张来平提供得二维非结构静止网格计算程序是我们编程的起点。在我调离研究群体以后的研究中也经常得到张院士的关心指导。在此对他们表示衷心感谢!

感谢我指导的研究生,他们的不懈努力使我有更多时间思考、写作和从容生活。特别说明,王巍博士参加了多体分离的相关研究,博士生徐春光和刘瑜参加了阀门动态特性、化学非平衡流和爆炸、气动弹性的相关研究,书中部分内容引用了他们博士论文的有关内容。

2004年初开始阀门仿真手段和动态特性分析的研究工作是在隋国发研究员建议下开展的。在探索和完善过程中还得到刘靖东、胡晓军、娄路亮等人热情帮助。2006年涉及爆炸现象的数值模拟以来一直得到刘瑞朝研究员的支持和帮助。在此表示衷心感谢!

作者水平有限,文中纰缪之处在所难免,诚望读者提出宝贵意见。

刘 君

2009年3月于长沙

# 目 录

## 第一章 引 言

|                                       |        |
|---------------------------------------|--------|
| § 1.1 有运动边界的非定常流动 .....               | ( 1 )  |
| § 1.2 计算流体力学的研究内容简介 .....             | ( 6 )  |
| § 1.3 含有运动边界的非定常流动数值模拟特点 .....        | ( 7 )  |
| § 1.3.1 流场显示技术(Machine、Mapping) ..... | ( 7 )  |
| § 1.3.2 网格技术(Mesh) .....              | ( 8 )  |
| § 1.3.3 计算方法(Method) .....            | ( 12 ) |
| § 1.3.4 机理分析(Mechanism) .....         | ( 16 ) |
| § 1.3.5 小 结 .....                     | ( 20 ) |
| § 1.4 本书内容及安排 .....                   | ( 21 ) |

## 第二章 基本方程

|                                     |        |
|-------------------------------------|--------|
| § 2.1 Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系 ..... | ( 23 ) |
| § 2.2 ALE 坐标系下变形网格的控制方程 .....       | ( 27 ) |

## 第三章 有限体积方法

|                        |        |
|------------------------|--------|
| § 3.1 有限差分方法基本理论 ..... | ( 38 ) |
| § 3.2 有限体积方法基本原理 ..... | ( 43 ) |
| § 3.3 有限体积方法分析理论 ..... | ( 46 ) |
| § 3.3.1 精度分析方法 .....   | ( 46 ) |

|         |                        |      |
|---------|------------------------|------|
| § 3.3.2 | 稳定性分析方法 .....          | (54) |
| § 3.4   | 非结构网格的有限体积方法 .....     | (56) |
| § 3.4.1 | 控制方程 .....             | (56) |
| § 3.4.2 | 物理量的重构 .....           | (57) |
| § 3.4.3 | 限制器 .....              | (59) |
| § 3.4.4 | 通量计算 .....             | (60) |
| § 3.4.5 | 时间离散 .....             | (63) |
| § 3.4.6 | 边界条件 .....             | (65) |
| § 3.5   | 有限差分方法和有限体积方法的差异 ..... | (67) |

## 第四章 关于几何守恒律的讨论

|       |                           |      |
|-------|---------------------------|------|
| § 4.1 | 网格变形引起的非物理解及所谓几何守恒律 ..... | (71) |
| § 4.2 | 几何守恒律的本质 .....            | (74) |

## 第五章 非结构网格生成及变形方法

|         |                                |      |
|---------|--------------------------------|------|
| § 5.1   | 非结构网格生成方法简介 .....              | (78) |
| § 5.1.1 | Delaunay 方法 .....              | (79) |
| § 5.1.2 | 阵面推进方法 .....                   | (80) |
| § 5.1.3 | 四叉树/八叉树方法 .....                | (81) |
| § 5.2   | 网格变形模型 .....                   | (81) |
| § 5.2.1 | 顶点弹簧模型 .....                   | (82) |
| § 5.2.2 | 弹簧倔强系数的确定 <sup>[1]</sup> ..... | (84) |
| § 5.2.3 | 六面体(结构)网格的变形 .....             | (86) |
| § 5.3   | 变形与重构相结合的动网格方法 .....           | (87) |
| § 5.3.1 | 网格变形与网格重构相结合的应用步骤 .....        | (88) |
| § 5.3.2 | 窗口边界的确定 .....                  | (90) |
| § 5.3.3 | 网格质量判据 .....                   | (91) |

|                    |      |
|--------------------|------|
| § 5.3.4 寻点算法 ..... | (93) |
|--------------------|------|

## 第六章 高精度信息传递方法

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| § 6.1 空间插值方法传递流场信息存在的难题 ..... | (95)  |
| § 6.2 采用动网格传递流场信息 .....       | (99)  |
| § 6.2.1 基本原理 .....            | (100) |
| § 6.2.2 一维传递方法稳定性条件 .....     | (101) |
| § 6.2.3 二维传递方法稳定性条件 .....     | (102) |
| § 6.2.4 三维传递方法稳定性条件 .....     | (104) |
| § 6.3 流场信息传递方法验证算例 .....      | (106) |

## 第七章 非结构网格计算程序的验证

|                                                  |       |
|--------------------------------------------------|-------|
| § 7.1 复杂外形的定常流动验证算例 .....                        | (111) |
| § 7.1.1 跨声速飞机标模 <sup>[2]</sup> .....             | (111) |
| § 7.1.2 类航天飞机三维定常绕流 <sup>[2]</sup> .....         | (112) |
| § 7.2 非定常动网格验证算例 .....                           | (114) |
| § 7.2.1 俯仰振动的 NACA0012 翼型绕流 <sup>[1]</sup> ..... | (115) |
| § 7.2.2 振动矩形机翼绕流 <sup>[1,2]</sup> .....          | (118) |
| § 7.2.3 飞船返回舱配平迎角的动态确定 <sup>[1,23]</sup> .....   | (120) |
| § 7.3 运动物体实验和计算验证 .....                          | (122) |
| § 7.3.1 实验方案 .....                               | (124) |
| § 7.3.2 试验结果及其处理 .....                           | (125) |
| § 7.3.3 整球的敞口实验及其数值模拟 .....                      | (126) |
| § 7.3.4 小 结 .....                                | (130) |

## 第八章 结构动力学相关基础理论

|         |                   |       |
|---------|-------------------|-------|
| § 8.1   | 有限自由度线性振动理论 ..... | (131) |
| § 8.1.1 | 单自由度线性系统 .....    | (132) |
| § 8.1.2 | 多自由度线性系统 .....    | (136) |
| § 8.2   | 振动方程的数值解法 .....   | (138) |
| § 8.2.1 | 力插值法 .....        | (139) |
| § 8.2.2 | 运动插值法 .....       | (139) |
| § 8.3   | 连续弹性体振动理论 .....   | (143) |

## 第九章 多体分离动力学系统的流动模拟

|         |                                  |       |
|---------|----------------------------------|-------|
| § 9.1   | 流体力学和飞行动力学耦合求解过程简介 .....         | (147) |
| § 9.2   | 整流罩分离过程数值模拟 .....                | (151) |
| § 9.2.1 | 两瓣方案 .....                       | (152) |
| § 9.2.2 | “质心后移动态失稳抛罩”方法及验证 .....          | (154) |
| § 9.2.3 | 四瓣方案 .....                       | (155) |
| § 9.3   | “虚拟网格通气技术”及应用 .....              | (156) |
| § 9.3.1 | 虚拟网格通气技术数值方法 .....               | (157) |
| § 9.3.2 | 虚拟网格通气技术的应用 <sup>[2]</sup> ..... | (159) |
| § 9.4   | 内嵌式助推器分离过程数值模拟 .....             | (161) |
| § 9.4.1 | 开启进气道整流罩的压力振荡过程 .....            | (164) |
| § 9.4.2 | 助推器完全脱离前、后体的相对运动求解 .....         | (166) |
| § 9.4.3 | 分离过程的数值模拟结果 .....                | (169) |
| § 9.5   | 子母弹抛撒过程数值模拟 .....                | (170) |
| § 9.5.1 | 抛壳过程 .....                       | (171) |
| § 9.5.2 | 子弹抛撒过程 .....                     | (172) |
| § 9.6   | 多体分离软件简介 .....                   | (173) |

## 第十章 阀门管道中的复杂流动模拟

|          |                               |       |
|----------|-------------------------------|-------|
| § 10.1   | 阀门数值模拟研究现状 .....              | (174) |
| § 10.2   | 安溢阀门的动态特性仿真研究 .....           | (181) |
| § 10.2.1 | 工作原理 .....                    | (181) |
| § 10.2.2 | 弹性敏感元件的结构分析 .....             | (183) |
| § 10.2.3 | 整阀动态特性的流固耦合模拟 .....           | (190) |
| § 10.2.4 | 部分结构参数对安溢阀门动态特性的影响分析<br>..... | (195) |
| § 10.2.5 | 计算发现的非正常关闭现象 .....            | (197) |
| § 10.3   | 减压器的动态特性仿真研究 .....            | (200) |
| § 10.3.1 | 工作原理和结构建模 .....               | (201) |
| § 10.3.2 | 动态特性的流固耦合模拟 .....             | (203) |
| § 10.4   | 小结 .....                      | (210) |

## 第十一章 化学非平衡流和爆炸现象的计算模拟

|          |                                |       |
|----------|--------------------------------|-------|
| § 11.1   | 引 言 .....                      | (211) |
| § 11.2   | 基于非结构网格的化学非平衡流动模拟解耦算法 .....    | (213) |
| § 11.2.1 | 非齐次波动方程的时间分裂法 .....            | (213) |
| § 11.2.2 | 新型解耦算法 .....                   | (215) |
| § 11.2.3 | 新型解耦算法的验证算例 .....              | (220) |
| § 11.3   | 基于 JWL 方程和点火/生长反应模型的爆炸模拟 ..... | (223) |
| § 11.3.1 | 爆炸反应流场的混合气体状态方程和反应模型<br>.....  | (223) |
| § 11.3.2 | 验证算例 .....                     | (230) |

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 附录 A 非结构动网格的数据结构及计算方法 ..... | (237) |
| § A.1 基于面的网格数据结构 .....      | (237) |
| § A.2 刚体运动模块 .....          | (239) |
| § A.3 网格变形模块 .....          | (240) |
| § A.4 流场求解模块 .....          | (241) |
| § A.5 网格重构模块 .....          | (242) |
| 参考文献 .....                  | (244) |

# 第一章 引言

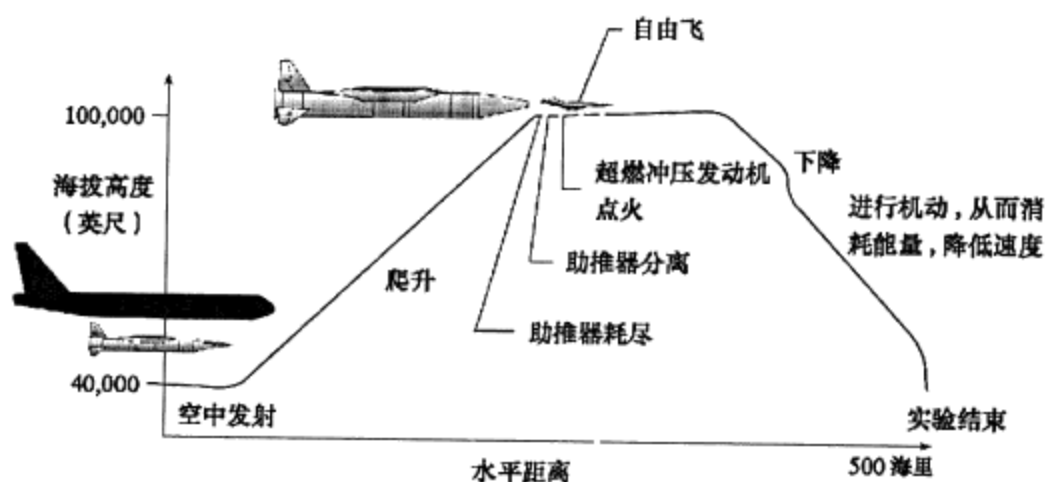
## § 1.1 有运动边界的非定常流动

流体动力学是研究在流体中有相对运动的物体（飞行器）与流体之间相互作用规律的学科；如果流体介质为可压缩气体，有时又称为空气动力学。“鱼翔浅底，鹰击长空。”自然情况下相对运动大多是物体（飞行器）主动在流体中运动产生的，但是，在大部分空气动力学研究中，经常采用相对坐标系变换方法，把飞行器的运动变为流体绕过静止飞行器的流动，这样一来可以使得流体动力学方程得到简化，也便于建立风洞等地面设备进行实验模拟研究。在飞行器静止的相对坐标系中，有些情况下流场内物理量不随时间变化，称为定常流动。

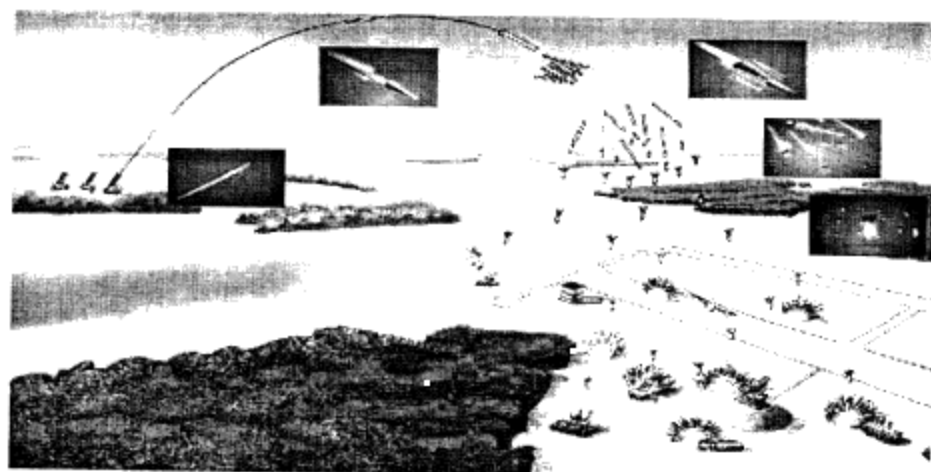
本书不研究定常流动，尽管有时也采用相对运动坐标系，但是飞行器在这种坐标系还有相对运动或者表面的变形。本书中关心的非定常流动主要包括两大类：（1）流场中有多个物体，它们之间有相对运动，称为多体分离问题；（2）物体表面变形对流场影响不容忽视的情况，称为物体变形引起的流固耦合问题。这两类问题共同特点是包含有相对运动边界的非定常流动。

多体分离问题在航天与航空领域并不鲜见，其中最为典型的是飞行器在大气层内飞行时发生的多体分离问题，例如，外挂物与载机分离、座舱盖/椅的弹射、多级火箭的级间分离、多弹头再入、子母弹抛撒、爆炸弹片飞散、冲击波驱动物体运动等。图 1.1 是部分工程应用示意图。这类问题的共同之处在于，相对气流高速运动的两个或多个物体之间本身有相对运动，形成的流场和物体所受到的气动力具有明显的非定常特点，简单采用相对运动原理从“静止空气中的运动物体”变为“运动空气中的静止物体”难以描述流体动力学本质机理。由于有相对运动物体形成的非定常流体作用力反过来又影响物体的运动

特性, 因此, 研究多体分离问题大多需要采用空气动力学和飞行力学相互耦合的方法。



(a) X-43 飞行过程



(b) 子母弹抛撒过程

图 1.1 多体分离问题的工程应用示意图<sup>[1]</sup>

实际上自然界大部分流动现象中存在物体变形流固耦合问题, 从空中飞翔的百鸟到水里嬉戏的游鱼, 从生生不息的呼吸系统到支撑生命的心血管系统, 从声声汽笛到滚滚车轮……都包含着运动边界和流体的相互作用。图 1.2 是部分物体变形流固耦合问题应用示意图, 包括管路系统阀门内部流动、冲击波与物体相互作用, 传统的自由液面流动等。这类流场共同特点是物体外形随时间变化, 运动界面与流体相互作用, 形成高度非定常、非线性的动力学系统。流体与固体两种介质的动力学和运动学特性采用不同方程描述, 相互作用通过界

面耦合。在飞行器设计中研究这类流体与固体相互耦合作用的应用需求也很多。例如, 飞行器结构不可能绝对刚硬, 在气动力作用下会发生弹性变形, 这种变形反过来又使气动力特性改变, 对飞行器的操纵性和稳定性会产生影响, 严重时会使结构破坏或造成飞行事故。随着飞行速度提高、结构重量减小, 气动弹性问题变得严重起来, 颤振验证也由此成为设计飞机必须考查的项目而写入强度规范。

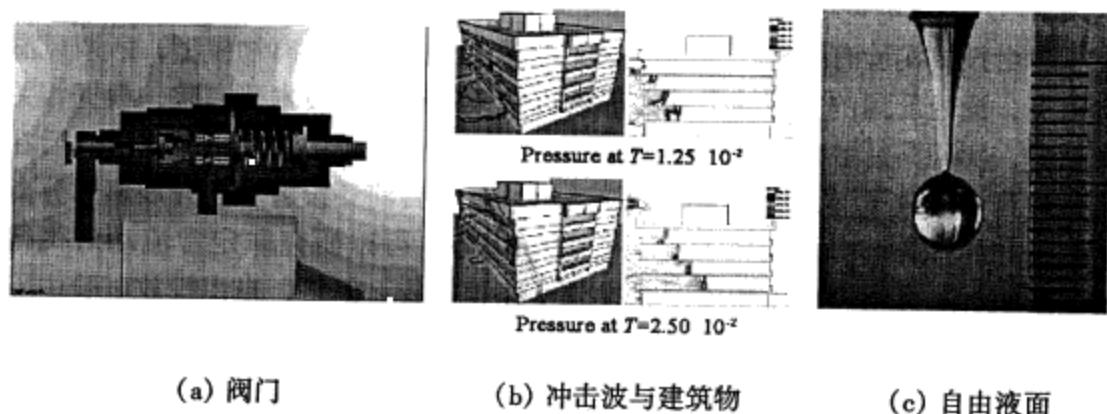


图 1.2 流固耦合问题的工程应用示意图

对于这类包含有运动边界的非定常流动的实验模拟, 除了技术难度大、测量信息少、费用高等因素, 最重要的是难以同时满足动力学相似律和运动学相似律。下面以多体分离问题为例, 对实验研究现状进行简单介绍。

目前国内外为了解决外挂物与载机分离、火箭级间分离等工程应用的需要, 提出捕获轨迹系统、自由投放 (又称动态投放)、网格测力等多方法, 建立了相应的特种实验设备。

网格测力法本质上是常规静态气动测力实验的批量化, 即通过对物体可能出现的所有位置和姿态进行测量, 建立气动力数据库, 供弹道分析和分离过程设计参考。网格测力法大多没有考虑状态变化过程中流动的非定常效应, 状态参数组合以后的实验工况非常多, 部分状态与实际飞行不符合, 因此测量到的部分数据是无用的。为提高实验效率, 采用捕获轨迹支撑系统 (Captive Trajectory Support — CTS) 模拟物体之间相对运动, 根据某一时刻测得的气动力反馈到风洞自动控制系统中, 通过运动方程求解器, 确定下一时刻飞行器的位置和姿态, 控制双支杆机构实现相对位置的自动调节。CTS 实验实现了空气动力学和飞行力学相互耦合, 但是计算中所使用的气动力数据是定常的, 本质上是常规静态试验的一种优化方法, 不能反映外挂物质心运动和姿态转动所诱导的动态特性。另外, 一般 CTS 实验不能同时实现多个物体机动, 为防止碰撞物体

之间不能非常近,模型支杆自由度有限无法模拟物体不稳定翻滚,分离过程中物体质量和转动惯量等特性不能改变,这些因素限制了 CTS 对实际过程的仿真程度,影响了模拟结果的精度。高精度 CTS 机构非常复杂,设计、加工和安装过程本身就需要很高的技术水平,同时对所安置的风洞设备也有特别要求,国内 CTS 实验结果主要来自中国空气动力研究与发展中心高速所的跨声速风洞,实验马赫数  $M_\infty < 2$ 。目前还没有看到超声速和高超声速的 CTS 实验结果。

自由投放实验有两种,一种是常规风洞实验中投放分离物模型,所谓风洞自由飞,国内看到的实验结果基本都来自航空气动力技术研究院,根据相关文献看,实验马赫数包括亚跨超范围;另一种是弹道靶中发射子弹,然后在飞行过程中投放子弹,尽管国内有弹道靶风洞,目前还没有看到开展多体分离问题研究的报告。自由投放实验比 CTS 有优势,可以研究非定常流动对飞行器的影响,还可模拟多个物体同时投放或连续投放。但是,自由投放试验中除了模型难以重复使用等不利因素外,主要是在几何相似的条件下满足流动相似和运动相似比较困难。根据相似理论推导,风洞实验中模型除了满足几何相似条件外,还需要满足从流体动力学基本方程出发推导出来的动力学相似参数,常用的有  $M_\infty$ 、 $Re$ 、 $Pr$  等,对于非定常流动,还要增加到  $St$  (Strouhal Number) 等参数。考虑飞行力学耦合以后,要求保持模型和飞行器原型的惯性力和重力之比一致,表征惯性力和重力之比的无量纲参数称为 Froude 数,即地面实验中  $Fr = u_\infty^2 / (g \cdot L) = \rho_\infty \cdot u_\infty^2 \cdot L^3 / (m \cdot g)$  与实际飞行过程相等。重力加速度  $g$  变化范围有限,那么模型几何缩尺以后气流速度也要成平方关系下降,给马赫数模拟带来很大困难,为了保证模拟马赫数,需要采用增大模型质量的重定律或改变加速度的轻定律;同时还要影响到  $Re$  等参数,因此完全模拟所有相似条件的实验是非常困难的。其次,自由投放实验结果的精度也限制这种研究手段的应用推广。自由投放实验采用正交高速摄影记录模型轨迹和姿态,理论上采用动力学系统辨识方法对图片进行处理,可以反推出气动力,但是根据图片得到的数据精度较低,因此目前这两种方法主要用来定性判断分离方案,实际很少用于分离方案设计。

近几年国内开始应用火箭撬实验手段来研究多体分离问题,即通过火箭发动机推动实验件沿轨道高速运动,达到预定速度时弹射试验件。火箭撬实验的模型经常采用实际尺度,易于满足几何相似模拟准则,而且模型内部还可安装传感器定量测量加速度和脉动压力等动态信息。但是,火箭撬实验存在实验周期长费用大问题,有时难以协调实验环境与飞行环境的动压和马赫数之间的矛

盾。由于火箭轨道离地面高度有限,因此地面效应的影响不容忽视,尤其在跨声速和马赫数不高的超声速范围内,地面反射激波导致实验过程和实际飞行流场本质上不可比拟。

总的来说,目前国内外实验方法各有所限,地面设备对这类问题实验模拟并不能像定常流动那么完善,一定情况下实验结果不具有可行性和权威性,难以满足工程型号应用需求。有些飞行动力学过程,例如带有操控动作的机动飞行,几乎没有相关设备开展有效模拟,因此,预测方法和数值模拟的研究工作一直在进行之中。

国内外在这一领域进展情况综述参见文献[1]、[2],下面对国内开展多体分离研究的阶段性代表性工作进行简单概述。

较早的预测方法是建立在实验数据基础上的半经验方法,广泛应用的是美国20世纪80年代初提出的影响函数法(Influence Function Method),其基本原理是把多体分离过程中相互影响进行线性化近似,例如,研究载机和外挂物分离时,在载机流场上线性叠加外挂物,不考虑外挂物对载机流场的二次影响,通过实验或理论得到有无载机两种流场中外挂物的气动力增量作为载机对外挂物的干扰,叠加在单独外挂物的气动力特性上;同样求出外挂物流场中载机的气动力干扰,叠加在单独载机的气动力特性上,然后分别计算载机与外挂物的分离轨迹,分析分离过程是否可行。分析中气动力估算主要采用建立在线性化小扰动位势流理论基础上的有限基本解方法,国外发展了专门分析软件,国内在20世纪90年代初中国空气动力研究与发展中心的刘刚等人<sup>[3,4]</sup>开展了相关研究。这类预测方法主要针对低速和亚声速飞机,没有考虑流动的非定常影响,在跨声速和超声速情况下出现激波以后也会失效。

随着计算流体力学的发展,人们开始探索从Euler方程和NS方程出发,通过流场的数值模拟提供分离过程的气动力特性。国外20世纪90年代初期在结构网格基础上提出所谓的“嵌套网格(Chimera Grids)”技术,即包含运动物体的子网格块在背景网格上作刚性运动,网格子块与背景网格以及子块之间的流动信息通过插值运算进行交流,以此来模拟研究多体分离问题。几乎在国外把这一网格技术应用于复杂工程问题的同时,中国空气动力研究与发展中心的杨永建等人<sup>[5]</sup>应用重叠网格从Euler方程出发模拟了长征火箭的4个捆绑助推器的分离过程。受到计算机条件限制,尽管工作量巨大和计算时间惊人,现在看来当时国内外的计算结果比较粗略。近几年类似的应用逐步增多,从公开发表文献看,除了中国空气动力研究与发展中心和航天空气动力技术研究院这两个专业研究单位外,国防科技大学、北京航空航天大学、南京航空航天大学、

西北工业大学、北京理工大学等高等院校也开展了相关应用研究。目前国内在分区重叠网格技术和分区拼接网格技术开发方面与国际水平基本接近,开发的应用软件接近国际先进商业软件<sup>[6]</sup>。尽管在计算机条件的支持下,计算外形越来越复杂,对流场刻画也越来越细致,但是这些研究工作大多采用相当于 CTS 实验的计算模型,取几个站位分别模拟定常流场,结合轨迹计算分析多体分离动力学过程。

近几年发展了一些新的计算方法和网格技术,推动了这一领域的研究工作。国内外有例证表明,具有相对运动多体动力学系统的数值模拟结果,已经成为工程设计的重要数据来源。但是,与定常流动的计算流体力学方法相比,包含有运动边界的非定常流动的数值模拟方法还有许多有待完善之处。

## § 1.2 计算流体力学的研究内容简介

计算流体动力学 (Computational Fluid Dynamics — CFD) 在我国学科设置的名称为计算流体力学,是利用电子计算机数值求解流体动力学基本方程获取流场有限的定量信息,并以此为基础预测流体的运动特性和流体对物体作用规律的技术科学。

张涵信院士把计算流体动力学研究内容简洁地概括为 5 个以 M 打头的英文单词和 1 个以 A 打头的英文单词<sup>[7]</sup>。第一个 M 是 Machine 的缩写,表示现代微电子技术是发展 CFD 的基础,早期主要指计算机为代表的硬件,近年来并行计算技术、网络计算技术应用越来越多,因此广义上还应该包括计算机的软件环境。第二个 M 是 Mesh 的缩写,进行流动模拟计算之前需要对实际物理空间和时间连续的定义区域划分成有限数目的时刻、网格或单元体,在离散时空基础上才能建立适合于计算机求解的数学模型,现在采用 CFD 解决工程问题时,大量人力耗费在网格生成工作上。第三个 M 是 Method 的缩写,既把描述流体特性的偏微分方程组转换为适合于计算机数字求解的仿真数学模型,一般是指流体动力学方程的求解方法,有时还包括根据研究的物理问题选择合适流动方程和定解条件。第四个 M 是 Mapping 的缩写,应用 CFD 得到的流场信息是存储在计算机内的大量数据,需要有效地提取各种有物理意义的曲线、图形供研究者分析流动规律,得到工程设计中关心的飞行器受力和受热等物理量,以及整合成其他专业人员能够用于工程设计的气动力和气动热数据、曲线等通用形式。第五个 M 是 Mechanism 的缩写,对 CFD 得到的流场信息进行专业分析,

根据物理原理、流体力学理论或实验结果评判计算结果是否合理,进一步发现新规律。最后一个 A 是 Application 的缩写,这是 CFD 成长和发展的主要驱动力。

与理论流体动力学和实验流体动力学相比,CFD 具有如下优势:首先,经济、快捷,较好地满足了航天航空领域工业化发展需要;其次,CFD 能提供流场中包括力、热、电子密度等较为详尽的物理量信息,能够方便地识别一些关键参数的影响规律;另外,求解流场类似于对实际问题的虚拟仿真,因此,应用 CFD 方法解决应用问题的过程又称为流动的数值模拟 (Numerical Simulation),具有“虚拟现实”特点,可以模拟实际飞行过程中很少遇到的故障条件或地面实验设备无法开展的工况;这些特点在多学科交叉、解决复杂应用问题时显得更有优势。

经过几十年的发展,CFD 已经成为流体动力学研究的重要手段,也是航空航天飞行器、水中航行器研制中相关系统分析和设计的重要工具。

## § 1.3 含有运动边界的非定常流动数值模拟特点

随着 CFD 的不断完善和发展,它一方面成为流体研究和工程研制中不可或缺的分析 and 设计工具,在工业领域应用越来越广泛,另一方面应用过程中遇到的一些新问题又给 CFD 学科自身发展提出新的研究课题。下面根据计算流体力学研究内容的 5 个 M 和 1 个 A 来介绍含有运动边界的非定常流动现象数值模拟时遇到的难题。

### § 1.3.1 流场显示技术 (Machine、Mapping)

为提高效率,在定常流动模拟时经常采用一些加快收敛的近似处理方法,降低计算过程中间流场的精度和物理意义,主要对最终的稳定流场进行分析,因此流场显示技术在计算过程结束以后应用,商业 CFD 软件中把相关模块称为后置处理技术 (Post-processing)。在这种情况下流场显示软件仅有数据处理功能,本质上独立于流场求解器,因此也可以采用专门图形显示软件,如 Tecplot、FieldView、CEI Ensight 等。非定常流动的特点是任一瞬时流场参数与前面对时刻流场信息相关,分析流动的空间规律需要了解流场参数随时间的演化历史,因此,非定常流动数值模拟在信息处理和显示方面对 Machine 和 Mapping

提出新的要求。

首先,非定常流动数值模拟对时间尺度的分辨率有要求,为了精细捕捉流场参数的变化历程,时间推进步长不能大,因此计算机 CPU 运算速度等硬件要求比定常流动数值模拟更高,本书后面提供的算例大多经历几个月才完成计算工作量。

其次,除了对计算机内存、CPU 运算速度等硬件的常规要求外,还需要能够存储不同时刻流场信息的大容量硬盘和高效的数据处理能力。国外有人曾经采用 10 亿多网格进行湍流的直接数值模拟 (Direct Numerical Simulation — DNS),计算过程需要存储的数据规模惊人,同时发现,即使采用等值线、彩色等值云图、流线等常规的流场显示技术进行流场后置处理,从如此庞大的数据海洋中提取、显示能够较为直观反映流动机理的关键信息也成为难点。另外,如何在不断变化的数据流中提取有效的物理量和辨识动力学规律也变得非常困难。例如,在分离流动模拟中,经常通过显示软件观测流场内奇点是否满足拓扑规律来定性判别计算结果,对于定常流动收敛以后流动图像不再变化,有充足时间进行处理分析,但是对于奇点数量和位置不断变化的非定常流场,不可能采用这种人工方法来判读。

在定常流动模拟中关心最终稳定解,作为流动模拟后置处理的流场显示技术基本可以满足需求。非定常流动与时间历程密切相关,模拟中最好是对每一时刻流场信息进行在线分析,辨识流动特征,发现不符合物理规律及时报错,引导研究人员进行干预。近年来国内外在计算机应用领域取得许多新进展,如数据融合、数据开采、图像辨识等技术,有些研究者正在应用这些新技术开展实时流场诊断方面的探索。由于流场模拟得到的信息量巨大、流动机理分析数字化准则有难度、对计算机显示存储硬件要求高、学科交叉性强等因素,目前还没有很好的成果。

### § 1.3.2 网格技术 (Mesh)

网格生成技术曾是 CFD 的重要内容,先后出现了结构网格、叠合网格、搭接网格、非结构网格、混合网格、直角网格等分类。网格生成方法大多基于线性代数空间变换或计算几何学等数学原理,把所选择的流场物理空间区域划分为有限数目的网格点或单元体。国外建立了多种针对 CFD 应用的网格生成软件,如 Gridgen、ICEM CFD、EAGLE、IGG、CFD-Geom 等,其中 Gridgen 国内用户较多。在这些网格生成软件帮助下,可以基本解决 CFD 应用中需要的网

格。这些网格生成软件直接对几何建模软件,如 Solidworks、CATIA、UG、Pro/E、AutoCAD 等的数据进行处理,极大地提高了 CFD 在工程领域的应用效率。

定常流动模拟时,网格生成过程与流动计算过程不关联,即软件生成的网格所映射的物理空间、存储编码和网格数目在流场计算中保持不变。在传统的 CFD 应用,网格生成经常合并到前置处理 (Post-processing)。但是,在进行含有运动边界的非定常流动现象数值模拟时,边界运动引起流场物理空间随时间变化,导致建立在计算区域上的离散网格也要随时间变化,需要发展与流场计算过程相关的新网格技术。从基本原理上说,实现网格变化主要有两种途径,一种是采用网格所对应的物理空间不变、增减网格数目的方法,目前还在应用的主要有运动嵌套网格和笛卡儿自适应网格;另一种是保持网格数目不变、通过所对应的物理空间变化来实现,发展出变形网格技术。

下面对这三种动网格方法的特点进行简单说明。

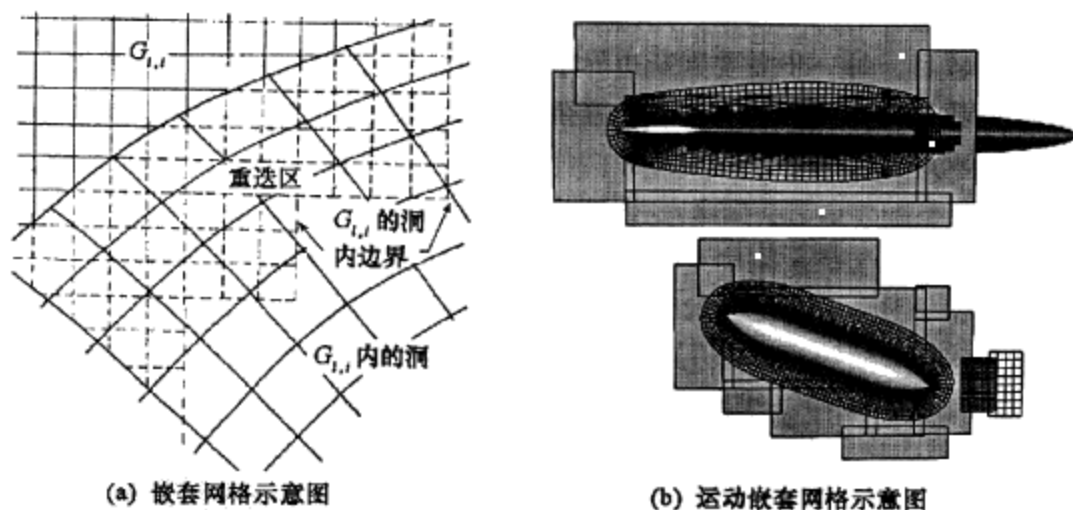


图 1.3 嵌套网格模拟分离过程

如图 1.3(a) 示意,嵌套网格把求解区域划分为众多形状相对规则、允许相互之间部分重叠的子区域,在每一个区域上生成网格(大部分应用基于结构网格,也有非结构的例子)。采用嵌套网格避免了单块贴体网格处理复杂外形的困难,但是在外形复杂、分块较多情况下,描述子块之间关系时比较繁琐,需要在交叠区内或物体占用的空间位置建立人工边界,即所谓“洞”边界。“洞”边界把子块上的网格分为参与计算的有效网格和不参与计算的无效网格。如果所有子块是静止网格,那么“洞”边界及其相邻子块“洞”边界上的信息传递关系在流场计算过程中保持不变,只需在计算初始时刻判断边界并建立插值公

式则可。应用嵌套网格可以模拟包含运动边界的流动。如图1.3(b)示意,一般采用部分子块在静止背景块上运动的嵌套网格技术,由于计算过程中子块的相对位置随时间变化,网格存在相对位移,因此每一步都需要根据运动子块之间及其与背景网格之间的相对位置判断“洞”边界,重新定义每一个子块的有效网格,这对于网格数目上百万的应用问题所增加的计算量是人们难以承受的。

如图1.4示意,笛卡儿网格(Cartesian Grids)采用与直角坐标系的坐标轴平行的矩形(二维)或长方体(三维)形状的网格,是CFD计算中最早出现的划分方法。笛卡儿网格生成简单,流动求解器容易实现,但是描述复杂外形的能力较低。为了提高边界附近流场计算精度,一种办法是进行局部网格加密,对于非定常流动模拟,网格尺度影响时间推进步长,这种办法不是十分合适。另一种办法是采用分区技术,在不规则形状的壁面区域进行特殊处理,但是边界算法会导致复杂的数据结构,影响计算效率。采用自适应笛卡儿网格可以实现运动边界的流动模拟。如图1.5所示,在计算过程中描述子弹运动需要增减网格数目,每一步需要判断边界单元并建立网格之间的动态数据链表,同样在网格数目较大的情况下,大量繁杂的搜索和插值的计算所耗用的计算机资源远大于求解流体力学方程本身。

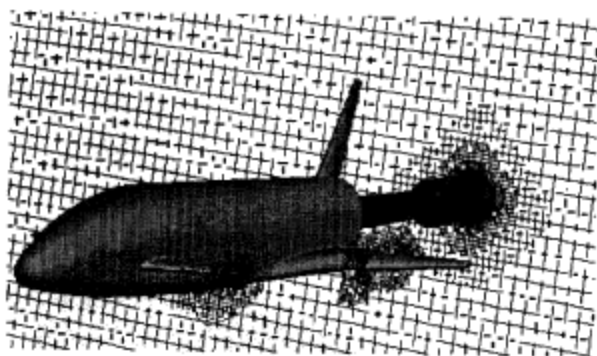
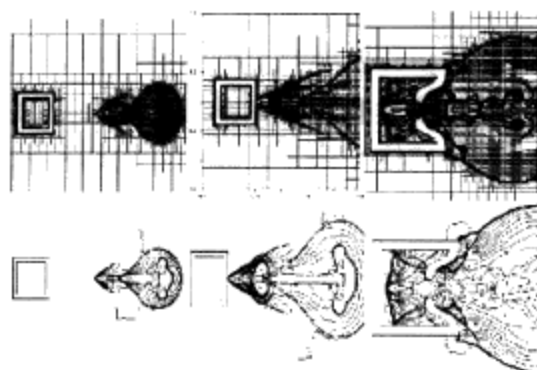


图 1.4 笛卡儿网格

嵌套网格计算常用插值运算进行子块之间的信息交换,笛卡儿网格增减网格以后也需要插值,理论上包含激波等物理量间断的流场只能采用线性插值,原则上会降低解的精度,但是定常流动大量应用例子显示,通过网格优化控制可以减小插值影响。对于非定常流动模拟情况有些不同,通过后面章节的例子可以看出,插值引起的误差存在延迟和积累,对物理解的影响较大。

变形动网格技术是在保持网格数目不变情况下,通过网格结构变形来适应运动边界引起的物理空间变化。变形动网格可以在结构网格上实现,也可以在

图 1.5 自适应笛卡儿动网格实例<sup>[55]</sup>

非结构网格基础上进行。实际上，基于结构网格的变形动网格技术在 CFD 发展初期就有应用，当时由于缺乏有效分辨激波的计算格式，采用激波装配法来模拟包含有激波的流动。对于激波位置大致确定的流场，通常是把激波作为计算区域的边界，通过 R-H 关系式计算出激波的运动速度和位置，然后采用代数插值的方法得到每一计算步的内部网格。激波装配法能够较为精确得到激波位置，但是需要给出满足一定几何形状要求的初始激波，因此，当流场中激波结构比较复杂，或者存在激波产生和消失等变化过程，就难以应用了。另外，激波装配法的中间结果是非物理的，主要应用于定常流动模拟。目前，基于结构网格的变形动网格技术在包含运动边界的流动现象模拟中主要应用于机翼气动弹性等问题。流固耦合问题的几何外形常较为复杂，数值模拟中大多采用基于非结构网格的变形网格技术。

非结构网格技术采用随机编码的数据结构，对网格形状和空间关联性要求比结构网格宽松得多，能够非常方便地生成复杂外形的网格，极大减轻 CFD 应用中网格生成的工作量。近年来网格生成发展主流是非结构动网格技术，国内看到的大部分国外 CFD 商业软件建立在非结构网格基础上。目前国内使用较为广泛的具有自主知识产权的 CFD 应用软件仍以结构网格为主，相信随着计算机性能不断提高和大规模并行计算方法推广，非结构网格将成为下一代国产 CFD 软件的基础。

在非结构网格上发展动网格技术主要难点是建立有效控制网格变形和运动的计算方法。在许多应用问题中，物体运动和表面变形受流体作用力控制，流场内网格的运动规律难以事先预测，常会出现品质优良的初始网格计算不久就引起局部网格严重扭曲的情况。如图 1.6 所示变形网格，左图示意连接在一起的大小两个长方体，下面的大长方体为刚体，下面的小长方体为弹性体，在小

长方体上表面带动下扭转变形。可以看出, 扭转角度  $90^\circ$  以后, 靠近顶部的截面网格正交性变差, 进一步扭转就要对上面几层进行局部重构。这个例子中尽管顶部网格严重扭曲, 但是依然有效。在图 1.6 右边所示的网格变形过程, 由于计算方法不够好, 出现了网格交错, 计算得到的体积为负, 导致基于有限体积法的流动模拟出现非物理解。

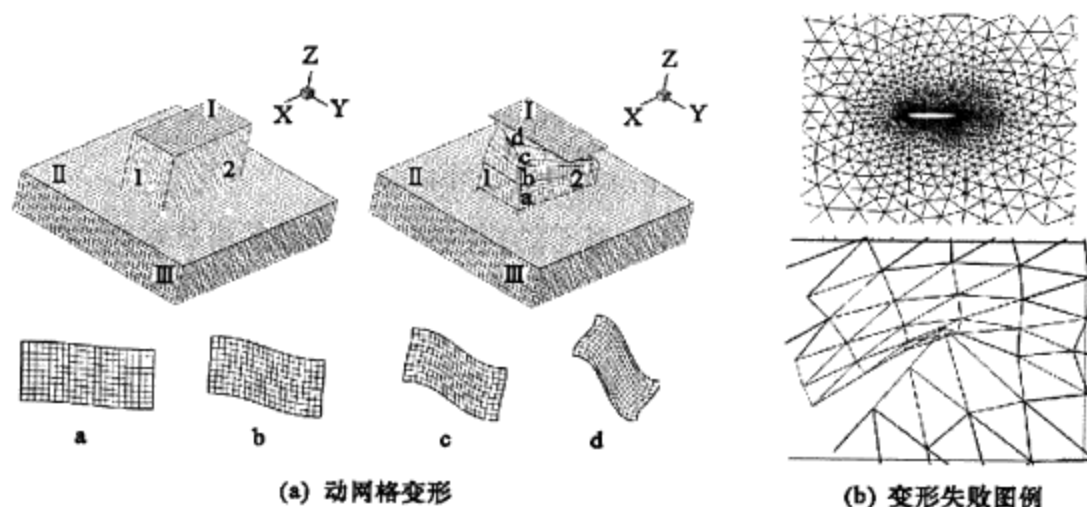


图 1.6

### § 1.3.3 计算方法 (Method)

通过以下分析来说明, 同样的计算方法应用于定常问题和非定常问题求解时, 表现出来的性质可能是有差异的。

对于如下常系数模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

采用 Lax-Wendroff 差分格式和中心差分格式离散, 得到:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (1.2)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (1.3)$$

用 Taylor 展开式进行分析, 差分方程等价于无穷级数构成的偏微分方程 (修正方程), 把模型方程精确解带入, 得到以上两个差分方程的截断误差 (Truncation Error) 分别为:

$$TE_i^n(1.2) = \left( \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{a \Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^n + O(\Delta t^3, \Delta x^3) \quad (1.4)$$

$$TE_i^n(1.3) = \left( \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a \Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^n + O(\Delta t^2, \Delta x^3) \quad (1.5)$$

按照偏微分方程数值解理论, Lax-Wendroff 差分格式是时间和空间均为二阶精度的差分格式, 中心差分格式的时间精度仅为一阶。对于非定常问题这一结论成立, 但是, 求解定常问题时结论正好相反。如果按照  $|u_i^{n+1} - u_i^n| \approx 0$  作为收敛判据, 代入两个差分方程再进行 Taylor 展开式进行分析, 由于没有保证  $(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \approx 0$  附加条件, Lax-Wendroff 差分格式实际上等价于包含粘性系数为  $\frac{a^2 \Delta t}{2}$  的二阶人工粘性项的中心差分格式, 达不到二阶精度。进一步还可以推断出 Lax-Wendroff 差分格式收敛解依赖于时间步长, 而中心差分格式的收敛解与时间推进步长无关。

这种差分格式应用于定常和非定常问题时出现精度变化、收敛解依赖于时间步长的现象在 MacCormack 差分格式和 Harten 构造的时间精确计算 (time accurate calculation) TVD 差分格式也有类似表现, 国外工作者很早就注意到了。在文献 [8、9] 中从二维模型方程出发, 通过理论分析和算例验证给出引起这种现象的本质。

目前应用最为广泛的求解方法是时间相关法 (Time Dependent Method)。对于定常流动问题, 沿时间方向推进求解, 把迭代步数足够多次以后物理参数随时间变化极小的流场看作满足时间  $t \rightarrow \infty$  的偏微分方程的数值解。定常流动数值模拟时只关心最终稳定解, 经常采用一些降低时间精度、加快收敛的计算方法, 如 Beam-Warming 局部线化隐格式、近似因子分解法 (Approximate Factorization — AF)、矩阵三角分解对称 Gauss-Seidel 迭代法 (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel — LU-SGS)、多重网格技术 (Multigrid)、局部时间步长技术等。对于非定常流动模拟, 以上这些加快收敛的算法影响解的精度, 难以直接应用, 因此发展时间高精度、高效率的计算方法非常必要, 但是目前进展有限。

除了差分格式和高效算法, 应用动网格技术对控制方程也有特别要求。为了应用变形动网格技术, 需要从常见的空间坐标位置静止的流体方程出发, 变换为能够描述运动边界的 ALE (Arbitrary Lagrange-Euler — ALE) 形式的方程。其次, 由于采用离散时间描述网格变形使得积分控制体的体积与物理过程不相符合, 还需要增加涉及描述几何变形的“几何守恒律” (Geometric Conservation Law — GCL) 控制方程及其求解过程。

变形动网格与前面的嵌套动网格相比,减少了时间推进一步以后所需的搜寻和插值计算量,但是网格变形能力毕竟有限,不可能解决位移和姿态变化较大的多体分离问题,应用中常常结合局部网格重构方法来实现。网格重构以后,需要根据旧网格上的流场信息得到新网格的流场参数,目前看到的新旧网格之间信息传递主要采用基于几何关系的局部插值计算方法。

通过下面具体应用实例来说明插值引起流场非物理波动现象。

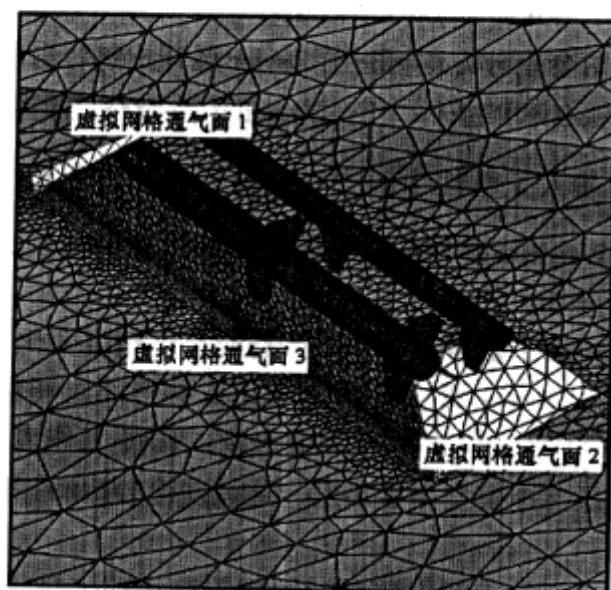


图 1.7 隐身飞机模型弹舱门附近网格

采用变形动网格数值模拟的隐身飞机内置弹舱门开启动态过程,图 1.7 所示是舱门附近表面网格(为便于显示,图中没有显示对开的弹舱门及其网格)。在非定常流动模拟初始时刻,内外壁面存在一定压力差的密闭弹舱门按照一定角速度逐步打开,随着舱门转角增大,弹舱门外侧网格不断压缩、内侧网格不断拉伸,局部区域的网格严重变形导致计算失败,需要重新生成高质量网格替换这部分严重拉伸变形的网格。网格重构后采用线性插值得到新网格上流场信息。计算得到的隐身飞机舱门开启过程中法向力和俯仰力矩随时间变化特性如图 1.8 所示意,飞行马赫数  $M_\infty = 0.8$  算例进行 4 次网格重构,飞行马赫数  $M_\infty = 2.0$  算例进行 5 次网格重构,每次网格重构的插值均引起明显波动。从图中看,非物理波动迅速衰减,曲线变化规律逐步回归到重构前趋势,这是由于网格重构区域相比整个计算区域很小,未重构区域作为边界对插值后流场有很强的约束,在其他情况下,结果就难以预料;其次,存在激波的超声速流场中引起的非物理波动幅度较大,恢复过程也较长。

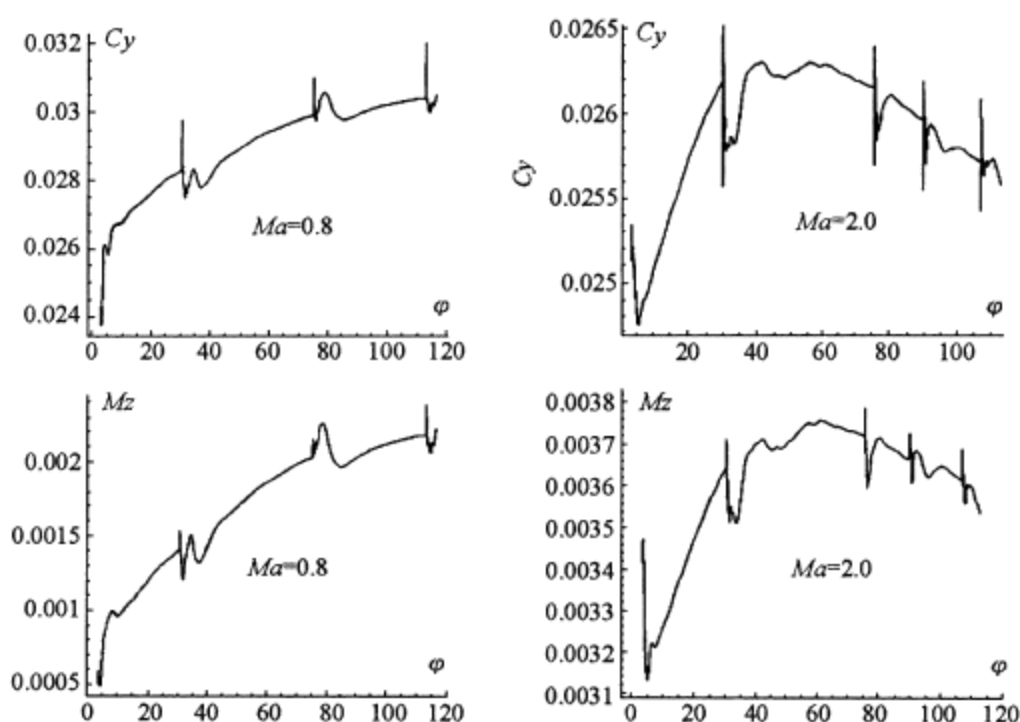


图 1.8 开启过程中隐身飞机气动力随时间变化特性

涉及运动边界的流动模拟，需要建立能够模拟两个物体从接触到分离的瞬时过程的动网格计算方法。例如，下图 1.9 是火箭整流罩分离过程中物面网格，初始时刻整流罩和弹体连接在一起，密闭的整流罩内部静止流体对外部流场没有影响，分离开始，两个物体距离从接触开始缓慢增大，整流罩内气体卸压过程非常快，内部高压气体通过缝隙喷射，产生膨胀波、激波等复杂流动现象，对于弹体外流场产生强烈非线性干扰，影响分离过程和弹体稳定。分离初期流场物理量变化剧烈，开启瞬间缝隙微小变化对流场有明显影响，分离距离

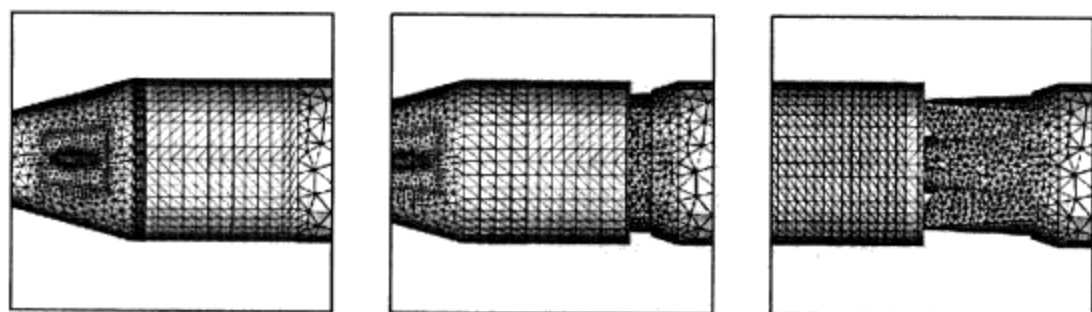


图 1.9 整流罩从密封到开启过程中的网格变化

从零到有限小距离, 分离区域网格经历“从无到有”的变化过程, 网格的拓扑空间发生变化, 给网格生成和变形控制算法带来很大困难。因此, 接触/分离问题一直是目前动网格技术的一个难点, 国际上一些包含动网格功能的软件如 CFD-Fastran、Fluent 等都未能很好地解决这个问题。

通过以上例子说明, 同样的计算方法应用于定常流动和非定常流动也可能表现出不同的特性, 应用变形动网格开展包含运动边界非定常流动模拟对计算方法提出了新的要求。相关问题的论述将在以后章节逐步展开。

### § 1.3.4 机理分析 (Mechanism)

在具体给出非定常效应影响的算例之前, 简单介绍 CTS 实验原理和过程。

大部分常规风洞中 CTS 设备仅能实现一个物体的运动, 实验原理如图 1.10 所示, 静止支杆支撑一个物体, 运动支杆机构支撑另一个物体 (为论述方便, 不妨称为外挂物), 启动风洞, 流场达到平稳, 得到作用于外挂物的气动力, 结合运动方程求解器或者采用事先预定规律, 确定下一时刻外挂物的位置和姿态, 通过运动支杆实现相对位置的自动调节, 如此运行直到实验结束。

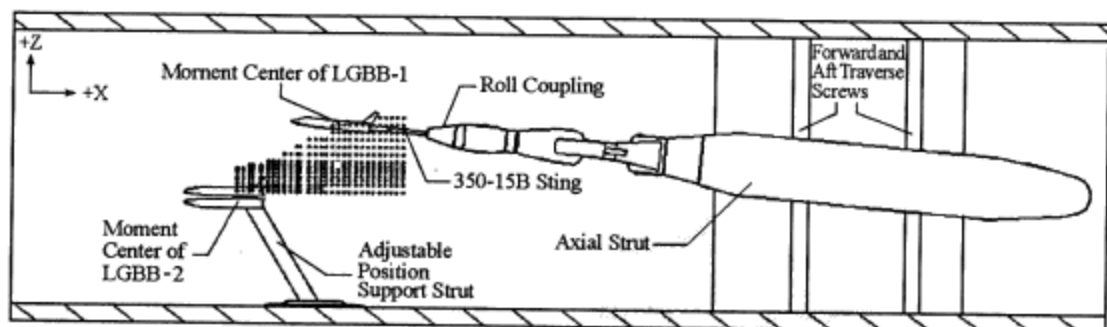


图 1.10 风洞 CTS 实验原理<sup>[56]</sup>

风洞运行过程中得到气动力特性直接用于时间推进求解外挂物的运动方程来确定下一站位位置和姿态, 看起来与实际飞行过程非常相似。但是, 在每一站位需要等到流场稳定以后才能测量气动力, 因此 CTS 实验得到的气动力数据是定常流动特性, 不能完全反映外挂物的运动过程中非定常流动所产生的气动力动态特性, 本质上也是常规静态试验的一种优化方法。

目前, 许多文献模拟多体动力学系统的流动, 采用类似于 CTS 实验的准定常计算方法, 只需在多体动力学系统相对运动过程中选取若干站位, 每个站位生成静止网格, 计算定常流场, 得到作用在外挂物上的气动力和力矩, 代入

弹道方程来预测运动物体下一站位的位置、姿态、速度等状态参数。尽管模拟中流场外形和网格有序变化,但是时间推进仅在弹道方程计算中考虑,流场与时间无关,流动机理存在明显不同,在一些情况下,导致建立在流动模拟基础上的分离轨迹预测会出现较大的误差。

下面通过简单模型的数值模拟,来说明开展包含运动边界问题研究中,非定常效应可能会导致运动特性出现明显差异,流动机理存在本质区别。

无量纲半径为  $R = 1.0$  的钝头体,在马赫数  $M_\infty = 5.0$ 、迎角  $\alpha = 0^\circ$  超声速气流中达到稳定飞行,在  $t = 0$  时刻释放,物体将在气流作用下减速运动。作为简化模型,没有模拟底部流动,不考虑表面摩擦阻力和重力作用,仅有头部气动阻力和物体质量这两个参数影响物体运动特性。

分别用非结构动网格技术 (Dynamic Unstructured-grid Technology — DUT) 和类似于 CTS 准定常计算方法 (下面简称为 CTS 方法) 对这一问题进行模拟。DUT 方法将在后面章节介绍,时间步长根据离散格式稳定性确定,求解过程需要进行几十万步时间推进。采用 CTS 方法计算流场时不涉及时间步长,求解运动方程中时间推进  $\Delta t$  之后,新流场仅改变自由来流速度参数,变为上一时刻自由来流速度  $U_\infty^n$  减去求解运动方程得到的物体运动速度  $U_m$ , 即  $U_\infty^{n+1} = U_\infty^n - U_m$ , 依此类推。CTS 方法的  $\Delta t$  人为给定,本文分别取 0.1、0.05、0.02、0.01, 实现与 DUT 方法同样的位移需要计算 8、18、45、92 个定常流场状态。

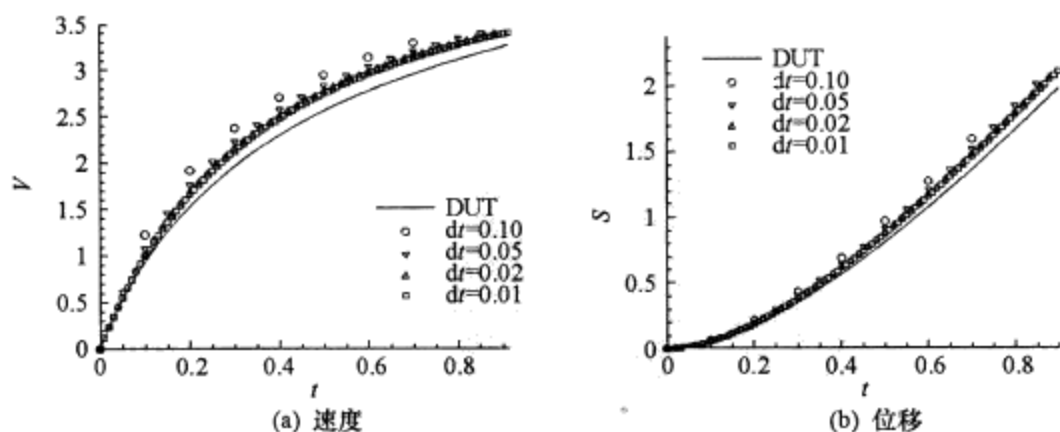


图 1.11 钝头体运动特性

图 1.11 给出物体无量纲质量  $m = 2.5$  情况下钝头体速度和位移随时间变化,并与 DUT 计算结果进行比较。可以看出,CTS 计算结果的运动特性随着  $\Delta t$  减小,曲线有收敛趋势,但收敛曲线与 DUT 计算得到的结果并不一致,二者之间速度差一直存在,位移差也随着时间在不断增加。通过下面流场结构分

析可以进一步推断出：由于 CTS 无法反映非定常流动的本质特征，即使时间步长趋向零也无法消除这种差异。

以时间步长  $\Delta t = 0.01$  工况为例，比较无量纲时间为  $t = 0.6$  和  $t = 0.86$  时刻两种计算方法流场。对于 DUT 方法，上游自由来流马赫数保持不变  $M_\infty = 5.0$ ，对于 CTS 方法，根据运动方程计算物体运动速度，然后得到相对速度作为自由来流速度，在  $t = 0.6$  是自由来流马赫数  $M_\infty = 2.04$ ，在  $t = 0.86$  为  $M_\infty = 1.66$ 。

图 1.12 压力等值线中 CTS 结果与初始马赫数  $M_\infty = 5.0$  的流场结构相似，属于典型的钝头体超声速绕流结构：超声速自由来流受到阻碍，钝头体产生弯曲脱体激波，物面顶点附近脱体激波后的参数接近正激波后的参数，形成高压、低速驻点区，驻点区内从物面出发的等压线，或者自我封闭，或者与脱体激波相交。流体微团离开亚声速驻点区后达到声速，连续扩张的曲面产生系列膨胀波。随着来流马赫数降低，脱体激波离开弹体的距离增大、曲率减小，两个时刻流场明显不同。

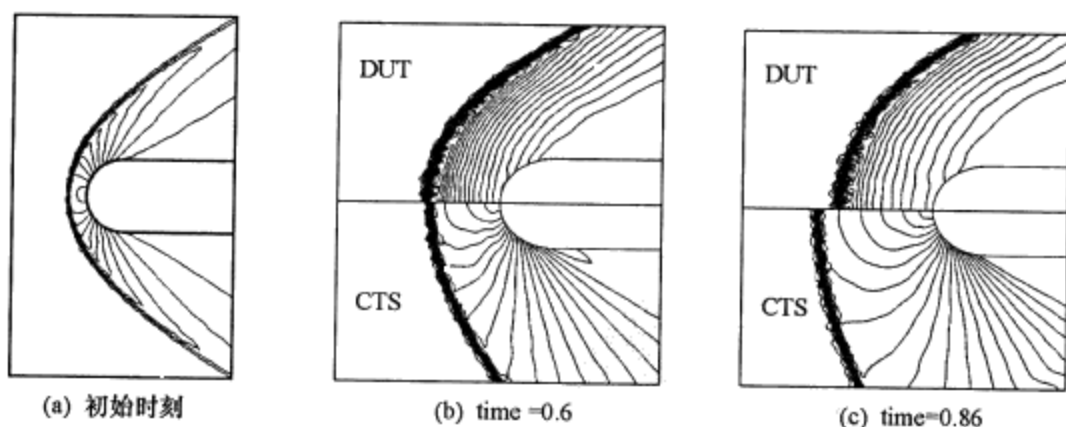


图 1.12 压力等值线

DUT 计算流场比较复杂，在气动力作用下，物体产生速度与自由来流方向一致的运动，通过扰动波的形式影响流场，亚声速驻点区内扰动向周围传播，超声速区内扰动传播方向受限于马赫锥内。对于亚声速区域，运动物面附近形成的空间需要流体来填充，如果时间非常短扰动影响范围很小，运动物面的抽吸作用类似于活塞效应，局部流体压力降低与活塞形成空间相关，运动同样距离顶点附近弧长形成的空间比较大，压力降低幅度也大，表现在图 1.12 压力等值线中为流场中形成与脱体激波近似的平行的等压线。在图中所显示的  $t = 0.6$  和  $t = 0.86$  两个时刻，流场内脱体激波位置和膨胀波系变化不明显。从原

理上, CTS 方法无法模拟物面运动产生的膨胀波在传递过程中的时间延迟, 把物体引起的扰动传播速度看作无穷大, 因此, 随着自由来流马赫数减小, 计算得到的脱体激波比 DUT 计算结果弯度更小。

比较从驻点到肩部联结点的物面压力分布如图 1.13 所示, 定常流动单调变化, 但是, 非定常流动在驻点区出现的明显压力平台, 而且在联结点附近出现压力回升。扰动在非定常超声速流场中传播特性较为复杂, 变化规律是多种因素非线性综合作用的结果, 不容易做简单的解释。在两个时刻, 定常流动和非定常流动之间的差别也不同。

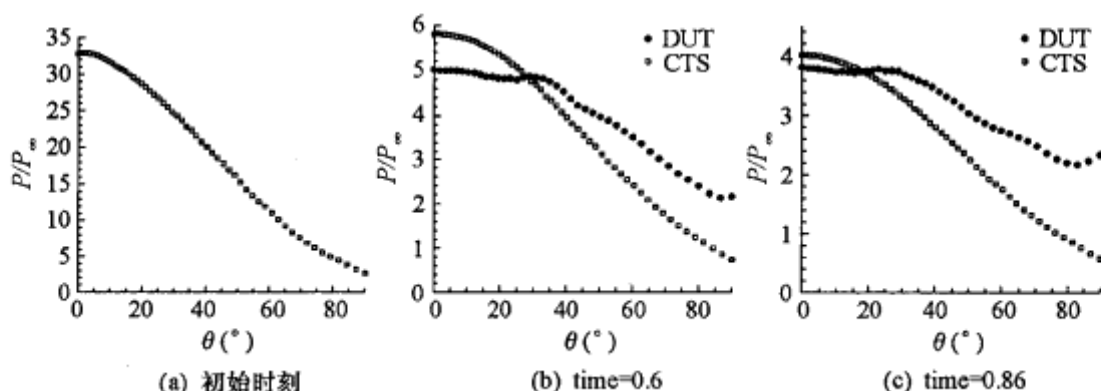


图 1.13 沿物面压力分布

由于物体的运动规律还与其质量相关, 下面考察无量纲质量的影响。

为比较说明, 求解运动方程的时间推进步长都取  $\Delta t = 0.01$ 。取质量  $m = 0.5$  作为轻物体算例, 由于运动速度很快, 采用  $t = 0.12$  时刻流场; 质量  $m = 25$  作为重物体算例, 取  $t = 1.0$  时刻的流场。两种计算结果比较如图 1.14 所示。可以看出, 在气动力远大于惯性力的情况下, 钝头体响应迅速, 在很短时间内 ( $t = 0.12$ ) 相对运动速度迅速减小, 物体运动反过来又引起非定常流场的变化剧烈, 导致 DUT 结果和 CTS 结果出现很大差异; 增大物体质量等效于降低气动力相对惯性力的比值, 经历较长时间 ( $t = 1.0$ ) 以后, 激波诱导运动才体现出来, 由于物体运动特征时间与流动特征时间相比较小, 引起流场的非定常效应也较弱, CTS 的压力等值线和物面分布曲线与 DUT 结果较为一致, 表明在这种情况下采用准定常假设是对实际模型很好的近似。

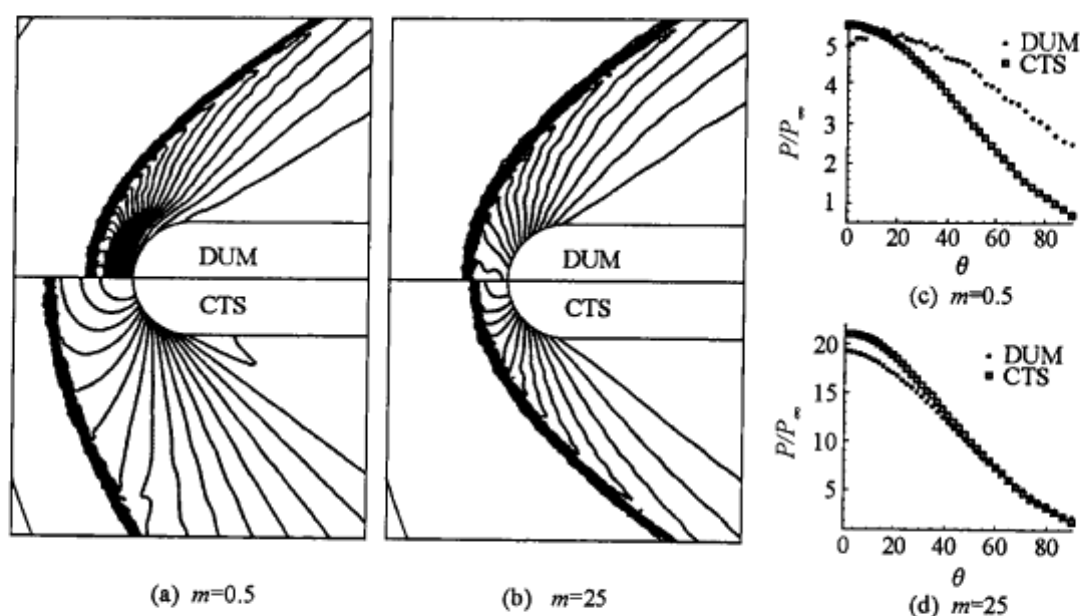


图 1.14 沿物面压力分布

### § 1.3.5 小 结

在 2003 年的一次学术会议上，张涵信院士根据世界航天航空需求牵引和学科发展趋势，把新世纪空气动力学领域的基础研究归结为五类问题，其中排在第一位的就是非线性非定常流动问题。他还进一步指出开展非线性非定常流动问题研究包括的主要内容：新的流动模式（分离、漩涡的特征和机理）、可变外形飞行器绕流特性和气动力预测理论、流型随时间参数演化规律、动态气动系数新概念、非定常流动计算方法、非定常流动试验和测量方法。通过以上论述和例子，可以看到对于含有运动边界的非定常流动数值模拟所遇到的诸多难题，验证了张涵信院士的预测，在非定常流动研究领域确实有许多工作值得深入。

目前，所看到的 CFD 软件由前处理、求解器和后处理三部分组成。前处理的主要任务是几何输入和网格生成；求解器是对控制方程数值计算得到流场数据，是 CFD 的核心部分；后处理主要用来完成结果输出和流场显示。这种单独模块结构是针对定常流动模拟特点设计的，操作者采用串行方式分别使用，通过统一数据接口的办法进行相互交流。各模块可以相互独立研制，前处理和后处理的编制者并不需要流体力学知识，事实上现在通用的网格生成软件

Gridgen 和流场可视化软件 Tecplot 中不涉及任何 CFD 内容。根据前面的介绍, 非定常流动机理本质要求计算中流场求解和机理分析是一个完全耦合过程, 对于流固耦合还存在网格变形, 以上这种过于独立的模块化设计形式不再合适, 研制流场模拟同时能够在线进行网格生成和结果分析的 CFD 软件, 不仅仅是对软件结构的更新, 更主要的是对计算流体力学研究者的挑战, 因为这项工作需要交叉学科知识, 需要新的思路。

## § 1.4 本书内容及安排

作者所在课题组从 1998 年开始从事非结构动网格技术及其应用研究, 在一些问题上有些认识或提出了解决方案, 现在整理出来供同行参考, 抛砖引玉, 希望更多的研究工作者关注这一领域, 期待取得更多理论成果, 推动应用。

本书从出发控制方程、计算方法等基本理论开始, 到验证算例和部分具体工程应用实例结束, 采用循序渐进方法论述。全书共分十一章, 每章大致内容如下:

第一章: 本章引言。简单介绍包含有运动边界的非定常流动的应用需求后, 根据计算流体力学的研究内容, 论述目前在这一领域的难点问题。

第二章: 从 Euler 坐标系下流体动力学方程组出发, 通过坐标变换推导出可以描述网格变形的 ALE 有限体积控制方程, 这是应用动网格技术的基础。

第三章: 对有限差分法理论进行推广, 建立针对有限体积格式的精度和稳定性分析理论。以 Euler 方程为例, 介绍有限体积格式的离散过程。

第四章: 通过理论分析证明所谓的“几何守恒律”本质是离散计算方法没有满足物理过程所致, 数值验证这一结论。

第五章: 非结构网格生成方法简介。介绍了采用弹簧近似模型实现网格变形的原理和局部重构过程需要的网格判据、重构条件、高效率寻点算法。

第六章: 提出了“移动网格传递流场信息”的新思路, 引入动网格库朗数概念, 给出移动网格稳定性条件。经过一维、二维、三维的数值算例, 验证此方法可以有效实现不同网格之间流场信息的传递, 从根本上解决了传递后物理量与原差分方程不相容带来的数值波动问题。

第七章: 给出验证算例, 包括非结构网格处理复杂外形、弹簧近似模型实现网格变形运动、刚体动力学耦合求解等计算结果的比较, 并且设计激波诱导

轻质物体运动的试验来验证前面提出的计算方法。

第八章：结构动力学相关知识的介绍。

第九章：以上计算方法在多体分离问题研究中的应用。针对计算流体力学领域中的难题“接触/间断”问题，提出一种“虚拟网格通气技术”。

第十章：以上计算方法在管路阀门（物体变形流固耦合）问题中的应用。

第十一章：以上计算方法应用领域的新拓展，包括在非平衡流动、爆炸与建筑物相互作用等问题的研究。

## 第二章 基本方程

### § 2.1 Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系

经典流体力学中流体微团概念是学科建立的基础, 这个创造性的理论模型非常重要。对于物理学家来讲, 微团中包含的微观粒子足够多, 采用密度、温度、压力等物理宏观统计量描述其特性是稳定的。对于数学家来讲, 微团本身几何尺度又无穷小, 对面积和体积等物理量存在数学上的极限运算, 可以建立用微积分方程表示的物理定律。认为流体微团的动力学过程满足质量守恒定律、Newton 第二定律 (动量定律)、能量守恒定律等物理规律, 结合流体介质状态方程和应力应变关系式等模型, 可以推导出数学上较为完备的流体动力学基本方程组, 具体推导过程属于经典流体动力学理论内容, 参考文献较多, 这里不再论述。本章下面的推导主要参考文献 [10]。

在流体力学领域经常采用两种坐标系描述流体微团运动特性, 一种是随流体微团一起运动的 Lagrange 坐标系, 另一种是空间位置固定的 Euler 坐标系。流体动力学基本方程组在不同坐标系中表现形式也不同。绝大部分流体动力学问题研究仅需要其中一种坐标系, 但是发展动网格技术时涉及两种坐标系。下面以质量守恒方程 (有时又称连续方程) 为例, 简单介绍一下在两种坐标系下应用质量守恒定律得到数学表达式的过程, 便于理解下一节引入的 ALE 控制方程。

首先采用 Lagrange 坐标系。如图 2.1(a) 示意, 从密度为  $\rho$  在空间连续分布的流体介质中任意取一个封闭的控制体  $V$  作为观测对象, 其质量为:

$$m = \iiint_V \rho d\sigma$$

由于坐标系随流体微团一起运动, 保持控制体  $V$  表面封闭性, 没有质量进出,

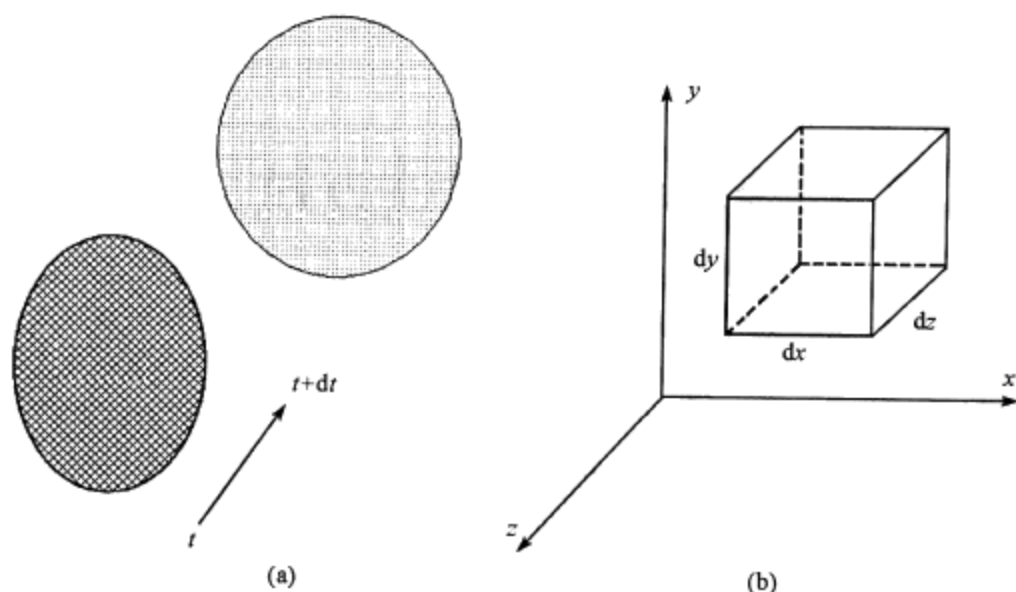


图 2.1 质量方程与两种运动坐标系

根据质量守恒定律, 得到下式:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\sigma = 0 \quad (2.1)$$

控制体  $V$  在流动中除了位置和形状随时间发生变化外, 体积也可能压缩或膨胀, 因此积分和求导运算交换次序时需要考虑  $V$  的变化率:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\sigma = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} d\sigma + \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \delta\sigma = 0$$

为了区别时间导数, 引入  $\delta\sigma = d\sigma$  表示体积微元。

根据数学分析中场论知, 体积微元  $\delta\sigma$  相对变化率就是散度, 因此, 式中第二项可以写为:

$$\frac{d}{dt} \delta\sigma = \text{div}(\mathbf{V}) d\sigma = (\nabla \cdot \mathbf{V}) d\sigma$$

这样就得到 Lagrange 坐标系下积分形式的质量方程:

$$\iiint_V \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] d\sigma = 0 \quad (2.2)$$

假如被积函数连续, 由于控制体  $V$  是任意选取, 可以得到微分形式的质量方程:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (2.3)$$

采用 Lagrange 坐标系是通过跟踪流体微团的方法来研究其运动特性, 首先需要确定跟踪对象, 然后描述其位置随时间的变化, 如果所有流体微团的运动规律知道了, 那么整个流体运动的状况就知道了。这种方法本质上是把理论力学中研究质点系所采用的方法推广到连续介质中而已。

流体微团的标识符号一般采用初始位置或与其相关的函数表示。假如流体微团空间位置在初始时刻坐标为  $(a, b, c)$ , 那么用这三个数字标识的流体微团任意  $t$  时刻的空间位置可以采用矢量表示:

$$\mathbf{R} = [x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t)]$$

编号为  $(a, b, c)$  的流体微团随波逐流, 在空间形成的曲线称为迹线。一条迹线是一个特定流体微团位置随着时间的变化历程。如果曲线有相交点表示这一微团多次经过同一空间。流体微团运动特性直接根据理论力学中运动质点的速度和加速度定义得到, 表示为位置矢量关于时间自变量的一阶和二阶导数:

$$\mathbf{V} = [u(a, b, c, t), v(a, b, c, t), w(a, b, c, t)] = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

与 Lagrange 坐标系下跟踪特定的流体微团不同, 在 Euler 坐标系下通过观测流经空间固定位置的流体微团来研究流动特性。在空间坐标为  $(x, y, z)$  的点上, 川流不息, 有不同的流体微团经过。由于观测点固定, 能够得到的仅是  $t$  时刻正好经过的流体微团的状态和运动特性:

$$\mathbf{V} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)] \quad (2.5)$$

在 Lagrange 坐标系下, 速度是导出物理量; 定义表达式 (2.4) 中  $(a, b, c)$  为流体微团的表示符号, 速度仅为时间的函数。在 Euler 坐标系下, 速度是原始物理量; 根据表达式 (2.5), 速度也是空间坐标  $(x, y, z)$  的函数。由于空间坐标  $(x, y, z)$  与时间  $t$  不相关, 上式 (2.5) 不仅可以看作  $(x, y, z)$  处速度随时间的变化规律, 也可以看成  $t$  时刻速度在流场空间的分布。把同一时刻满足微分方程  $d\mathbf{R} \times \mathbf{V} = 0$  的不同流体微团连起来就形成流线。一条流线上包含有无穷多流体微团, 在某一时刻流场内流线的相交点常常表现为常微分理论中的奇点, 表示流动发生了突变, 而且流场内奇点要符合拓扑规律。

数学上把定义在空间区域上的函数称为场, 在 Euler 坐标系下描述流动的物理参数均为空间坐标的函数, 可以应用数学中的场论来分析。在流体力学领

域经常提到的速度场、密度场、压力场等术语实际上都隐含是在 Euler 坐标系下进行研究。

在 Euler 坐标系下,如图 2.1 (b) 示意,选择控制体  $V$  作为研究对象。由于空间坐标固定,控制体  $V$  形状不随时间变化,有流体进出。由于控制体不封闭,不能直接应用质量守恒定律,但是定性分析,通过边界面  $S$  流出控制体的流体质量必然引起密度减小,数学表示如下:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma \approx - \iint_S \rho U_n ds \quad (2.6)$$

这里  $U_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  是流体运动速度  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  在控制体边界的外法向  $\mathbf{n}$  的投影。根据场论中的奥高定理,上式可以写出 Euler 坐标系下积分形式的质量方程:

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\sigma \approx 0 \quad (2.7)$$

如果体积非常小,可以近似认为等号成立,同样可以推出微分形式的质量方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.8)$$

注:从 (2.8) 式推导 (2.7) 式,等号成立,但是采用质量定律等号不成立。

尽管坐标系不同,但是描述的物理本质是相同的,比较 (2.3) 和 (2.8) 可以看出:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho$$

等式左端称为密度的随体导数,是 Lagrange 坐标系观点;右端两项是 Euler 坐标系观点,第一项称为局部导数,代表由于场的非定常效应引起的密度变化,第二项称为对流导数,表示流体速度场的不均匀性引起密度变化。

在流体力学理论中把以上两种坐标系之间关系式称为密度传输公式。对于任意流体动力学参数  $\varphi$ ,存在微分形式的传输公式:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \varphi \quad (2.9)$$

积分形式的传输公式:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \varphi d\sigma = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\sigma + \iint_S \varphi \cdot U_n ds \quad (2.10)$$

如果把控制体  $V$  看作计算流体动力学的网格,在 Lagrange 坐标系下,网格是运动的,也可以变形;但是网格边界面  $S$  的运动速度与当地流体微团的速

度相同,由流体动力学方程决定,不能人为给定。在 Euler 坐标系下控制体  $V$  静止,网格运动速度为零,这一点可以从上面质量方程建立过程看出,如果流体微团进出控制体的同时控制体本身也在压缩或膨胀,就难以应用质量守恒定律根据流量来确定密度变化规律。

对于有相对运动边界的流动现象进行数值模拟时, Euler 坐标系下固定网格技术不再适用,采用 Lagrange 坐标系下流体动力学可以描述空间网格的变化,但是基于以下两方面原因,这种计算方法应用范围受到很大限制:

(1) 在 Lagrange 坐标系下根据 Newton 第二定律建立动量方程时,描述加速度需要引入位置矢量  $\mathbf{R}$  二阶导数项,二阶微分方程组求解比一阶微分方程组更困难。

(2) 目前计算流体动力学中绝大部分计算方法是针对 Euler 坐标系描述的流体力学控制方程建立的。有限差分方法、有限体积方法等计算模型是在物理量空间分布特性(线性、黎曼问题间断等)已知的基础上进行空间积分,很少有直接处理时间导数项的空间积分离散算法。在已经生成好的网格基础上的离散流体运动控制方程,一般在特定物理空间内网格相对位置和拓扑规律事先确定。采用 Lagrange 方法需要根据流体运动控制方程生成和调整网格,计算过程复杂,方法应用于复杂外形尚不成熟。

为了应用 Euler 坐标系下建立的计算流体动力学方法,同时允许网格以任意速度运动,提出了可以描述变形动网格的任意 Lagrange-Euler (Arbitrary Lagrange-Euler — ALE) 方法,在此基础上建立有限体积计算方法的控制方程。

## § 2.2 ALE 坐标系下变形动网格的控制方程

尽管 ALE 方法目的是建立变形动网格的有限体积控制方程,但是直接从积分形式流体力学方程组出发,会遇到空间积分运算和时间导数运算交换次序的问题,从微分形式出发较为方便。下面以直角 Euler 坐标系  $(x, y, z, t)$  下质量方程为例进行推导。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

计算流体动力学应用中,经常采用坐标变换手段把几何形状较复杂的物理空间  $(x, y, z, t)$  变换到规则的计算空间  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  内。引入如下通用坐标变换形式:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z, t) \\ \eta = \eta(x, y, z, t) \\ \zeta = \zeta(x, y, z, t) \\ \tau = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, \tau) \\ t = \tau \end{cases}$$

采用计算空间自变量表示物理空间坐标函数的全微分写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \\ d\tau \end{pmatrix}$$

采用物理空间自变量表示计算空间坐标函数的全微分写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \\ d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}$$

比较以上两式可以得到变化关系式:

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

求解以上线性方程组, 得到变换关系式:

$$\begin{cases} \xi_x = J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) \\ \xi_y = J(x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta) \\ \xi_z = J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \\ \eta_x = J(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) \\ \eta_y = J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \\ \eta_z = J(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) \\ \zeta_x = J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\ \zeta_y = J(x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta) \\ \zeta_z = J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_i = -x_r \xi_x - y_r \xi_y - z_r \xi_z \\ \eta_i = -x_r \eta_x - y_r \eta_y - z_r \eta_z \\ \zeta_i = -x_r \zeta_x - y_r \zeta_y - z_r \zeta_z \end{cases}$$

式中 Jacobi 矩阵行列式:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{\partial(x, y, z, t)} \\ &= \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} \\ &= [x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)]^{-1} \end{aligned}$$

其数学本质是计算空间 $(\xi, \eta, \zeta)$ 上单位体积在物理空间对应的实际体积的倒数。

根据以上变换关系式, 得到如下关系:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_t \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_t \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_t \right) = 0 \quad (2.12.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_x \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_x \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_x \right) = 0 \quad (2.12.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_y \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_y \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_y \right) = 0 \quad (2.12.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_z \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_z \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_z \right) = 0 \quad (2.12.4)$$

以 (2.12.2) 式为例进行证明:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_x \right) = \frac{\partial(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)}{\partial \xi} = y_{\xi\eta} z_\zeta + y_\eta z_{\xi\zeta} - y_{\xi\zeta} z_\eta - y_\zeta z_{\xi\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_x \right) = \frac{\partial(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi)}{\partial \eta} = y_{\eta\xi} z_\zeta + y_\xi z_{\eta\zeta} - y_{\eta\zeta} z_\xi - y_\zeta z_{\eta\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_x \right) = \frac{\partial(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}{\partial \zeta} = y_{\xi\zeta} z_\eta + y_\xi z_{\zeta\eta} - y_{\xi\eta} z_\zeta - y_\eta z_{\xi\zeta}$$

采用自变量 $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ 表述物理空间 $(x, y, z, t)$ 的导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\end{aligned}$$

以上这些关系式带入直角坐标系下质量方程 (2.11) 式, 就可以写出计算空间自变量  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  表示的质量方程形式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J^{-1}\rho}{\partial \tau} + \frac{\partial J^{-1}\rho(\xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w)}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\rho(\eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w)}{\partial \eta} \\ + \frac{\partial J^{-1}\rho(\zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w)}{\partial \zeta} = \frac{\partial J^{-1}\rho}{\partial \tau} + \sum_{\xi \neq \eta} = 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

物理空间的体积微元与计算空间体积微元之间通过 Jacobi 矩阵行列式联系:

$$d\sigma = dx dy dz = J^{-1} d\xi d\eta d\zeta = J^{-1} d\sigma_c \quad (2.14)$$

如果采用结构网格技术离散计算空间, 那么在网格结点上变量  $(\xi, \eta, \zeta)$  总是取正整数, 且相邻之间单位增减, 即  $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$ , 显然计算过程中不管物理空间网格单元体积  $d\sigma$  是否变形, 对应的离散空间的网格单元体积是  $d\sigma_c = 1$ 。从原理上说, 对于非结构网格, 也可以通过数学变换, 使得物理空间体积微元  $d\sigma$  随时间  $t$  有变形或运动的情况下对应的计算空间上体积微元  $d\sigma_c$  不随  $\tau$  变化。

在计算空间取固定不变的体积微元控制体  $V_c$  对质量方程 (2.13) 进行积分:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial J^{-1}\rho}{\partial \tau} d\sigma_c + \iiint_{V_c} \sum_{\xi \neq \eta} d\sigma_c = 0 \quad (2.15)$$

由于  $V_c$  不随时间  $\tau$  变化, 其中第一项时间导数算子和积分算子可以互换:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial J^{-1}\rho}{\partial \tau} d\sigma_c = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{V_c} J^{-1}\rho d\sigma_c$$

采用前面的关系式进行反变换, 对自变量和积分区域进行替换, 不影响函数的积分值, 上式可以写为如下采用物理空间体积  $V$  及其相应函数的积分表达式:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V J^{-1}\rho d\sigma_c = \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho d\sigma \quad (2.16)$$

上式在形式上与 Lagrange 坐标系描述的质量方程相似,但是存在本质差异,在 $(\xi, \eta, \zeta)$ 空间积分控制体 $V_c$ 是静止的,对应的控制体 $V$ 是由于坐标变换引出的,在数值上与物理空间的控制体 $V$ 等价,表面可以存在流体的进出,因此不能直接应用质量守恒定律。

表达式(2.15)中第二项是质量方程中对流项 $\sum_{\epsilon\tau\epsilon}$ 的体积分,函数积分值与时间自变量无关。对被积函数 $\sum_{\epsilon\tau\epsilon}$ 在冻结了时间自变量以后从计算空间 $(\xi, \eta, \zeta)$ 到物理空间 $(x, y, z)$ 进行反变换,得到:

$$\sum_{\epsilon\tau\epsilon} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial \rho(u - x_\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(v - y_\tau)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(w - z_\tau)}{\partial z} \right]$$

物理空间坐标点 $(x, y, z)$ 是计算空间变量 $\tau$ 的函数。

从数学表达式看,上式中 $\mathbf{x}_c = (x_\tau, y_\tau, z_\tau)$ 表示物理空间坐标点 $(x, y, z)$ 随计算空间变量 $\tau$ 的变化率,量纲单位与速度相同。

从推导中看出, $\mathbf{x}_c$ 是坐标变换过程引出的参数,根据变换函数关系式来确定,与流动速度无关,因此本质上与 Lagrange 坐标系的随体导数完全不同。同样采用反变换对积分表达式中的自变量和积分区域替换以后,上式写为如下 $V_c$ 对应的物理空间体积 $V$ 及其相应函数:

$$\iiint_{V_c} \sum_{\epsilon\tau\epsilon} dJ_c = \iiint_V \left[ \frac{\partial \rho(u - x_\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(v - y_\tau)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(w - z_\tau)}{\partial z} \right] d\sigma$$

应用曲面积分的高斯公式:

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho(u - x_\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(v - y_\tau)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(w - z_\tau)}{\partial z} \right] d\sigma = \iint_S \rho(\mathbf{V} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.17)$$

结合(2.16)式和(2.17)式就得到采用 ALE 有限体积方法描述的质量方程:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_V \rho d\sigma + \iint_S \rho(\mathbf{V} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

由于物理空间和计算空间的时间尺度一样 $\tau = t$ ,大部分计算文献中网格变化率直接写为 $\mathbf{x}_c = (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = (x_t, y_t, z_t)$ ,这样一来质量方程写为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\sigma + \iint_S \rho(\mathbf{V} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2.18.1)$$

同样可以建立 ALE 有限体积方法描述的动量方程和能量方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{V} d\sigma + \iint_S [\rho (\mathbf{V} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{V} ds = \iint_S [P]_n ds \quad (2.18.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + e \right) d\sigma + \iint_S [\rho (\mathbf{V} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}] \left( \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + e \right) ds \\ = \iint_S [P]_n \cdot \mathbf{V} ds + \iint_S \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (2.18.3)$$

式中  $[P]_n$  为作用流体应力张量在表面的分量, 包括静压力和粘性力。方程中均未考虑体积力及其作用, 能量方程没有考虑辐射、化学反应等热源。

由于运动网格相关的量仅体现在对流项中, 因此以上动量方程和能量方程右端项从物理空间  $(x, y, z, t)$  变换到计算空间  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  内, 然后在积分意义下反变换回物理空间过程中没有变化。例如,  $x$  方向的动量方程:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uw}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

其中应力项  $\tau_{xx}$  从物理空间  $(x, y, z, t)$  变换到计算空间  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  为:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \mu \left[ \frac{4}{3} \left( \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - \frac{2}{3} \left( \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \left( \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned}$$

可以看出这是不涉及与  $\mathbf{x}_c$  有关的网格运动, 因此在有限体积上积分以后, 变换回以物理空间  $(x, y, z, t)$  表示的形式, 和直接从上式积分完全一样。

虽然公式 (2.18.1) 至 (2.18.3) 中体积  $V$  和面积  $S$  与流场空间对应区域的数值相等, 也可直接采用实际物理空间坐标计算, 不过从前面的推导中可以清楚地看到, 其物理意义并不等同于 Lagrange 坐标系下随体导数表达式中相关符号。

在 CFD 研究和应用中习惯采用无量纲参数。如果用长度  $L^*$ 、自由来流速度  $u_\infty^*$  和密度  $\rho_\infty^*$  作为参考物理量进行如下无量纲化:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x^*}{L^*} \\ y = \frac{y^*}{L^*} \\ z = \frac{z^*}{L^*} \\ t = \frac{t^* u_\infty^*}{L^*} \\ u = \frac{u^*}{u_\infty^*} \\ v = \frac{v^*}{u_\infty^*} \\ w = \frac{w^*}{u_\infty^*} \\ \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \\ p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* u_\infty^{*2}} \\ T = \frac{T^* R_\infty^*}{u_\infty^{*2}} \\ a = \frac{a^*}{u_\infty^*} \\ e = \frac{e^*}{u_\infty^{*2}} \\ h = \frac{h^*}{u_\infty^{*2}} \\ \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty^*} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

其中, 上标“\*”表示无量纲量, 下标“∞”为自由来流参数;  $R_\infty^*$  为自由来流气体常数,  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $\mu$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $h$  分别为气体的密度、温度、压力、粘性系数、声速、内能和焓; 采用笛卡儿直角坐标系  $(x, y, z)$  表示速度矢量  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  的三个方向分量。

采用 ALE 有限体积方法描述三维无量纲可压缩非定常流动的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q d\sigma + \iint_S [F_c(Q, \mathbf{x}_c) + F_v(Q)] \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2.20)$$

其中  $Q$  为守恒变量:

$$Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T \quad (2.21)$$

单位质量流体总能由内能和动能组成, 对于比热比为常数  $\gamma = 1.4$  的完全气体, 为:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

方程中与粘性无关的函数写为如下形式:

$$F_c(Q, \mathbf{x}_c) = Fi + Gj + Hk \quad (2.22)$$

其中  $(i, j, k)$  表示直角坐标系三个坐标方向  $(x, y, z)$  的单位矢量。包含有相对运动速度的对流项通量表达式写为:

$$F = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho Uu + p \\ \rho Uv \\ \rho Uw \\ (e + p)U + x_i p \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho Vu \\ \rho Vv + p \\ \rho Vw \\ (e + p)V + y_i p \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho Wu \\ \rho Wv \\ \rho Ww + p \\ (e + p)W + z_i p \end{bmatrix}$$

采用符号  $V_c$  标示流体在 ALE 坐标系下相对速度:

$$V_c = (U, V, W) = [(u - x_t), (v - y_t), (w - z_t)] \quad (2.23)$$

有限体积方法文献中有时把  $F_c$  称为无粘通量, 实际上它既不是矢量, 也不是张量, 是为表述简洁引入的符号。同样, 下面表述控制体表面应力引起的所谓“粘性通量”也理解为函数的符号:

$$F_v(Q) = F_\mu i + G_\mu j + H_\mu k \quad (2.24)$$

式中与粘性应力和热传导相关的矢量为:

$$F_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \phi_x \end{pmatrix}, \quad G_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \phi_y \end{pmatrix}, \quad H_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

对于 Newton 流体, 应力和应变之间存在如下关系式:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{yx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{zx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \text{Re} &= \frac{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^* D^*}{\mu_{\infty}^*}\end{aligned}$$

对于层流问题, 空气粘性系数  $\mu_l$  由 Sutherland 公式给出:

$$\mu_l = T^{\frac{3}{2}} \times \frac{1 + \frac{110.4}{T_{\infty}^*}}{T + \frac{110.4}{T_{\infty}^*}} \quad (2.25)$$

能量方程中包括热传导和应力做功两部分:

$$\begin{aligned}\varphi_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \\ \varphi_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \\ \varphi_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z\end{aligned}$$

其中热传导表示为:

$$q_x = k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = k \frac{\partial T}{\partial z}$$

热传导系数  $k$  和粘性系数  $\mu_l$  之间采用如下关系:

$$\begin{aligned}k &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\mu}{\text{Re}} \\ \text{Pr} &= \frac{\mu_{\infty}^* c_p^*}{k_{\infty}^*}\end{aligned} \quad (2.26)$$

建立上式时隐含使用定义比热比  $\gamma = c_p^* / c_v^*$  和普适气体常数  $R^* = c_p^* - c_v^*$  的条件。根据分子动力学理论推导出双原子分子的比热比  $\gamma = 7/5 = 1.4$ , 在大部分情况下用于空气也能达到较为满意的精度。

以上方程式不封闭, 还需要增加状态方程和内能关系式, 对于完全气体, 有:

$$p = T \cdot \rho \quad (2.27)$$

(注意: 温度取不同无量纲参数会得到不同的状态方程表达式; 例如采用环境温度无量纲  $T = T^* / T_{\infty}^*$ , 得到状态方程为  $p = T\rho / \gamma M_{\infty}^2$ , 相应的热传导系数的形式也要变化。)

如果不考虑粘性项通量, 即  $F_v(Q) = 0$  时, 那么控制方程 (2.20) 式称为 ALE 有限体积方法描述的三维可压缩非定常无量纲 Euler 方程。对从有限体积

方法出发的动网格数值模拟技术而言, 求解 Euler 方程还是 NS 方程并没有本质区别。为了书写简便, 下面论述中采用 Euler 方程, 如果没有特别说明, 所得结论也适合于 NS 方程。

在后面计算化学非平衡流动和爆炸问题时, 推导 ALE 有限体积方法描述控制方程的过程和以上推导过程一样。

## 第三章 有限体积方法

在 CFD 领域,数值离散求解流体动力学偏微分模型方程(控制方程)的方法主要有:有限差分方法、有限体积方法和有限元方法。有限元方法在模拟包含有激波等数学间断的流动问题时,数学理论和计算方法还在发展中,应用相对较少。

采用文献[11]定义:对于一个偏微分方程,把方程中所有偏导数近似地采用代数差商代替,最终用一组代数方程近似这个偏微分方程,进而可以进行计算求解,这种偏微分方程的数值离散方法称为有限差分方法。由于代替偏导数的差商不是唯一的,近似偏微分方程的代数方程表达形式也有很多种。应用中经常把数学表达形式相似的代数方程组采用涉及空间有限离散点的一个标量或矢量代数方程简练表述,称其为有限差分方程或有限差分格式(Finite Difference Scheme — FDS)。

目前国内外应用的有限差分方法大多建立在结构网格基础上,优点是理论成熟,方便构造高精度的差分格式,但是用于复杂几何外形须引入坐标变换等过程,对空间网格离散品质要求较高,高精度的边界条件离散也是难题。

对积分形式的流体控制方程,可以直接在物理空间上建立代数方程计算求解,称为有限体积方法(Finite Volume Method — FVM)。与有限差分方法相比,有限体积方法易于满足流动的质量、动量和能量守恒特性,对网格适应性强,很容易应用于几何特征可变化的非结构网格系统。按照有限体积方法得到的计算方法不但在模拟包含有激波等间断的流场方面物理意义明确,而且在动网格技术和网格自适应加密等需要网格分割和合并的重构过程时也有优势。目前,国外大部分商业 CFD 软件采用有限体积方法。但是,CFD 的主要理论,包括差分格式离散建模、精度分析和稳定性理论等支撑学科的核心内容,都是建立在有限差分方法基础上,大部分计算流体力学教材关于有限体积法的内容介绍很少,尤其是在理论方面比较含糊,连精度和稳定性等基本性质也很少讨论。

在介入有限体积法之前,有必要回顾一下有限差分方法的基本理论。

### § 3.1 有限差分方法基本理论

本章以一维标量模型方程为例, 简要介绍有限差分方法一般原理及其主要理论。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

把连续区域  $x \in [0, L]$  离散为有限网格结点, 采用  $n$  表示时间方向结点编号、 $j$  表示空间方向结点编号。采用算子形式, 偏微分方程 (3.1) 表示为  $L(u) = 0$ , 精确解为  $u_e$ , 采用有限差分方法得到的差分方程记为  $L_\Delta(u_j^n) = 0$ , 其中  $u_j^n$  为方程的数值解。

通常用局部截断误差 (Local Truncation Error — LTE) 来表述差分方程逼近微分方程的程度。有两种等价定义 LTE 的方法:

方法一: 对于任意连续光滑函数  $v(t, x)$ :

$$LTE = L_\Delta(v_j^n) - L(v)_j^n = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q) \quad (3.2.1)$$

方法二: 如果取精确解为  $u_e$ , 则满足:

$$LTE = L_\Delta[(u_e)_j^n] = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q) \quad (3.2.2)$$

有了 LTE 定义, 不但可以给出差分方程精度定义, 还可以给出相容性定义。根据以上表达式, 判断出差分方程时间方向是  $p$  阶精度而在空间方向是  $q$  阶精度, 同时给出相容性定义: 在  $p > 0$  和  $q > 0$  时, 差分方程与微分方程是相容的, 即各点满足:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \|LTE\| = 0 \quad (3.3.1)$$

或者整个区域满足:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \|LTE\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \|L_\Delta[(U_e)^n]\| = 0 \quad (3.3.2)$$

式中  $U_e$  表示对每个结点上精确解  $u_e$  构成的向量,  $\|L_\Delta[(U_e)^n]\|$  表示取范数形式。

相容性表示有限求解区域上随着网格增多, 即  $\Delta t$ 、 $\Delta x$  趋向 0 时, 差分方程趋近于微分方程, 但是并不能保证差分方程的数值解  $u_i^n$  趋近于微分方程的精确解  $u_e$ 。为此, 定义差分方程的收敛性描述数值解和精确解的近似程度:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \|(U_e)^n - U^n\| = 0 \quad (3.4)$$

满足相容性和收敛性的差分格式, 意味着在有限区域上网格越多, 它与原问题

逼近程度越高。

差分方程是微分方程的近似, 采用 Taylor 级数展开和时间导数替换为空间导数的方法, 可以得到与差分方程等价的偏微分方程:

$$L(u)|_j^n = \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \Big|_j^n$$

上式称为差分方程的修正方程, 其中系数  $\gamma_l$  仅仅与差分方程  $L_{\Delta}(u_k^n) = 0$  中常数  $a$ 、时间步长  $\Delta t$  和网格空间距离  $\Delta x$  相关。不难发现第二种定义:  $LTE = \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}$ , 因此, 有时也通过修正方程来分析相容性。

实际计算过程中, 网格数目不可能取无穷大, 那么在有限网格和初始条件基础上, 计算过程能否顺利进行, 得到希望的数值解? 这一问题涉及差分格式的稳定性。由于计算机受到字长限制, 实际存储的数据  $\hat{u}_k^n$  与  $u_k^n$  之间存在舍入误差:

$$\epsilon_j^n = u_j^n - \hat{u}_j^n \quad (3.5)$$

在求解过程, 出现的舍入误差不能被放大到掩盖了数值解的地步, 如果初始时刻存在舍入误差  $\epsilon_j^0$ , 计算过程中不会被无穷放大, 迭代到任意时刻的舍入误差依然有界:

$$\|E^n\| \leq K \|E^0\| \quad (3.6)$$

式中,  $E$  表示对每个结点上舍入误差构成的向量,  $K$  为正常数。上式就是差分格式的稳定性要求。

以上三个性质是有限差分法必须要满足的条件, 这是必要条件, 不是充分条件, 既满足这些性质并不能保证得到满意的差分格式。

建立差分格式必须要分析其相容性、收敛性和稳定性。从以上推导中可以发现, 验证相容性最容易, 稳定性分析有一些方法, 收敛性定义表达式中没有直接显示出与差分格式的关系, 直接证明过程非常复杂, 目前只能采用 Lax 等价定理间接证明。

**Lax 等价定理:** 对于适定的线性初值问题, 如差分方程满足相容性条件, 则其稳定性是其收敛性的充分必要条件。

教科书介绍了采用求解矩阵分析稳定性的方法。例如, 利用模型方程 (3.1) 的一阶迎风差分格式, 在边界点已知  $u_0^n = u(0, t^n) = f(t^n)$  的情况下, 可以写成如下矢量形式:

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_M^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & 0 \\ c & 1-c & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_M^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cu_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi U^n + B^n$$

认为边界点精确给定, 伴随数值解产生舍入误差传播规律为:

$$E^{n+1} = \Phi E^n = \Phi \Phi E^{n-1} = [\Phi]^2 E^{n-1} = [\Phi]^n E^0$$

根据稳定性定义, 要使时间步长推进过程中保持  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi\|^n$  有界, 则要:

$\|\Phi\| \leq 1$ 。对于上面格式取 3 个点, 得到特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 - c$ , 得到  $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 。

理论上确定差分格式可以写出矩阵  $\Phi$ , 然后求其某种范数, 可以按照这种方法分析给出稳定性条件。但是, 对于非结构网格, 矩阵形式不再像以上这么有规律, 而且相邻结点之间编码不同得到的矩阵也不同, 不可能推导出通用的范数表达形式, 对于动辄上万结点的应用问题, 即使采用计算机求范数也很难。

目前稳定性分析中最常用的是建立在 Fourier 级数基础上的 von Neumann 方法。国内看到的大部分 CFD 教材中, 介绍 von Neumann 稳定性分析方法时采用 Fourier 级数理论, 如把数值解的舍入误差写为无穷项 Fourier 级数形式:

$$\begin{cases} \varepsilon(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(t) e^{ik_m x} \\ \varepsilon_j^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^n e^{ik_m x_j} \end{cases} \quad (3.7)$$

Fourier 级数针对定义域连续的函数 (自变量连续, 函数本身可以不连续), 有限差分法中仅能给出有限离散点上的函数值, 依靠这些值是无法确定上式中 Fourier 级数的系数, 更不能证明级数本身的存在和唯一; 为了应用 Fourier 级数, 有些文献分析采用分段均匀函数假设, 这与构造高精度格式所采用的分布函数可能不一致, 出现前后矛盾。其次, 实际应用中差分方程总是建立在空间区域的有限离散点上, 不可能描述波数分布范围  $[-\infty, +\infty]$  的简谐波。第三, 舍入误差是实数, 右端项为复数形式, 二者相等需要满足一定条件。因此, 按照以上形式理论上不完善, 操作上缺乏可行性。

文献[11]中, 采用提出有限离散 Fourier 级数概念, 并作为差分格式稳定性分析的理论基础, 可以实际应用, 本文认为较为合适, 下面进行简单介绍。

在  $x \in [0, L]$  包含有限个间断点的可积函数可以展开成 Fourier 级数:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(k_m x) + b_m \sin(k_m x)]$$

把求解区域  $x \in [0, L]$  等分为  $M$  段 (为便于分析设为偶数), 则有  $M+1$  网格结点, 网格长度为  $\Delta x = L/M$ , 编码从 0 到  $M$ 。在  $x$  轴上以这些离散点作为波峰或波谷, 构成完整简谐波的最大波长和最小波长为  $\lambda_{\max} = L = M\Delta x$  和  $\lambda_{\min} = 2\Delta x$ 。即使为了避免涉及边界条件把求解区域周期性扩展到整个实数域  $[-\infty, +\infty]$ , 依然无法描述波长小于  $\lambda_{\min}$  的简谐波, 同样波长大于  $\lambda_{\max}$  的情况对于了解区域  $x \in [0, L]$  函数特性也没有帮助。

有限离散的 Fourier 级数认为, 在  $M+1$  位置上信息的基础, 数值解可以表示为波长  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  且为  $\lambda_{\min}$  整数倍的简谐波函数值的叠加, 采用波数  $k = 2\pi/\lambda$  表示的简谐波函数表达式:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{M/2} [a_m \cos(k_m x) + b_m \sin(k_m x)] \quad (3.8)$$

式中系数  $a_m$  和  $b_m$  可以根据在离散点  $x_j = j\Delta x$  处差分方程数值解确定:

$$u_j = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{M/2} [a_m \cos(k_m x_j) + b_m \sin(k_m x_j)] \quad (3.9)$$

在  $M+1$  个网格点上建立方程, 线性代数理论可以证明  $a_m$  和  $b_m$  存在且唯一, 因此采用有限离散 Fourier 级数表示数值解的 (3.8) 式是唯一的。在给定网格点上数值解以后, 可以分解为离散空间所能分别的简谐波线性叠加, 如 (3.8) 式或 (3.9) 式, 通过分析这些谐波的传播特性可以预测数值解的变化规律。

为了推导方便, 采用周期条件延拓求解区域  $x \in [-L, L]$ , 相应编码也改变为  $-M$  到  $M$ , 另外增加时间层的标志, 上式化为复数形式:

$$u(x, t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2} A_m(t) e^{ik_m x} \quad (3.10)$$

式中, 波数  $k_m$  对应的复数指数  $w_j(m) = e^{ik_m x_j}$  与位置无关, 振幅  $A_m(t) = \frac{a_m - ib_m}{2}$  与位置无关; 右端项为实数, 显然有:  $A_{-m} = \bar{A}_m$ 。

把上式代入差分方程, 可以得到振幅的变化情况。例如, 采用一阶迎风差分格式离散模型方程 (3.1), 不妨设  $a > 0$ , 得到:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) = (1-c)u_j^n + cu_{j-1}^n \quad (3.11)$$

把有限离散 Fourier 级数表示的数值解 (3.10) 代入, 则有:

$$\sum_{m=-M/2}^{M/2} A_m^{n+1} e^{ik_m x_j} = (1-c) \sum_{m=-M/2}^{M/2} A_m^n e^{ik_m x_j} + c \sum_{m=-M/2}^{M/2} A_m^n e^{ik_m (x_j - \Delta x)}$$

上式两侧乘以共轭复数  $\overline{w_j(m)}$ , 然后在  $[0, \pi]$  上积分, 利用  $a \neq b$  条件下积分性质:  $\int_0^\pi \sin ax \sin bx dx = 0$  和  $\int_0^\pi \cos ax \cos bx dx = 0$ , 得到:

$$A_m^{n+1} = (1-c) A_m^n + c A_m^n e^{-ik_m \Delta x} = G_m A_m^n \quad (3.12)$$

式中  $G_m = A_m^{n+1}/A_m^n$  表征波数为  $k_m$  简弦波从  $t^n$  时间发展到  $t^{n+1}$  过程振幅比值, 称为放大因子。理论上波动按照模型方程 (3.1) 的规律传播过程中, 振幅比值保持不变, 按照差分方程的规律传播时, 如果  $|G_m| > 1$  表示振幅不断增大, 如果没有抑制必然导致系统发散,  $|G_m| < 1$  表示输入信号衰减, 系统趋向稳定。舍入误差伴随数值解产生, 传播规律也满足上述递推关系, 也有:

$$\epsilon_j^{n+1} = G_m \epsilon_j^n \quad (3.13)$$

为了保证舍入误差不会随着时间被放大, 其振幅的比值需要满足:

$$|G_m| < 1 \quad (3.14)$$

可以看出, 放大因子  $G_m$  仅与常数  $a$ 、时间步长  $\Delta t$  和网格空间距离  $\Delta x$  相关, 可以根据上式进一步写出差分方程 (3.10) 式, 写出放大因子的形式:

$$G_m = 1 - c + ce^{-i(k_m \Delta x)}$$

得到稳定性条件:  $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 。

为便于表述, 在文献 [11] 中引入空间移位算子  $E_x^*$ , 作用在基上有:

$$E_x^* w_j(m) = e^{ik_m \Delta x} w_j(m)$$

这样一来, 差分方程写为如下形式:

$$\left( \sum_{m=-M/2}^{M/2} C_m^{n+1} E_x^* \right) u_j^{n+1} = \left( \sum_{m=-M/2}^{M/2} C_m^n E_x^* \right) u_j^n$$

可以写出放大因子  $G_m$  的通用形式:

$$G_m = \frac{\sum_{m=-M/2}^{M/2} C_m^n E_x^*}{\sum_{m=-M/2}^{M/2} C_m^{n+1} E_x^*}$$

式中系数  $C_m^n$ 、 $C_m^{n+1}$  与常数  $a$ 、时间步长  $\Delta t$  和网格空间距离  $\Delta x$  相关。

文献 [10] 中介绍多维问题差分格式的稳定性分析, 认为与以上一维问题类似, “把数值解展开为二维的有限离散 Fourier 级数, 并只取其中的一个波代入差分方程, 求出放大因子, 通过要求放大因子的绝对值小于 1, 可以得到稳

定性条件。”但是,从下面推导来看,按照前面的思路来推广 von Neumann 方法会遇到麻烦,进行多次尝试没有成功。下面简单介绍遇到的问题。

在空间坐标  $(x, y, z)$  的  $(M+1) \times (P+1) \times (Q+1)$  网格结点,即三个方向分别等分为  $M$ 、 $P$  和  $Q$  段,首先是否存在有限离散 Fourier 级数在数学理论上是个问题。

假设数值解的有限离散 Fourier 级数也可以表述为:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{q=-Q/2}^{Q/2} \sum_{p=-P/2}^{P/2} \sum_{m=-M/2}^{M/2} A_{mpq}(t) e^{i(k_m x + k_p y + k_q z)} \quad (3.15)$$

得到在  $t^n$  时刻、网格结点  $(x_j, y_r, z_s)$  上的值:

$$u_{jrs}^n = \sum_{q=-Q/2}^{Q/2} \sum_{p=-P/2}^{P/2} \sum_{m=-M/2}^{M/2} A_{mpq}^n e^{i(k_m x_j + k_p y_r + k_q z_s)}$$

代入差分方程以后,在  $k_m = k_p = k_q$  情况下三个方向不同位置对应的复数指数  $w_{jrs}(m) = e^{ik_m(x_j + y_r + z_s)}$  相同,在乘以共轭复数  $\overline{w_{jrs}(m)}$  以后得到的不是仅包含网格结点  $(x_j, y_r, z_s)$  处产生的项,而是包括满足  $x_j + y_r + z_s$  相等条件所有点,换言之,无法写出放大因子  $G_{mpq} = |A_{mpq}^{n+1}| / |A_{mpq}^n|$  的表达式。

为此,我们调研了国内多种教科书,称可以把以上 von Neumann 方法推广到二维或三维差分方程的稳定性分析中,但是没有给出细致的说明。对于非结构网格,例如,三角形离散的二维问题,按照以上方法难以写出如 (3.15) 这样的离散 Fourier 级数。

## § 3.2 有限体积方法基本原理

为便于数学分析和图形示意,考虑二维模型,考虑如下线性偏微分模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

把流场空间离散为有限数目单元体,CFD 的求解方法可以应用于不同的流体动力学方程,有时把根据问题选定的具体方程称为出发方程或控制方程,单元体有时也称为控制体。在边界为  $S$ 、编码为  $k$  的控制体  $V$  上,对模型方程进行空间积分,应用高斯公式,得到对应的积分型控制方程或出发方程:

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma + \oint_{S_k} (f\mathbf{i} + g\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (3.17)$$

原则上每个控制体形状可以是任意的, 一般情况下取边界数目相等的多面体(二维情况下  $z$  方向为单位长度), 对于  $m$  面围成的控制体  $V$ , 控制方程进一步写为:

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma + \sum_{i=1}^m \left[ \iint_{S_i} (f\bar{i} + g\bar{j}) n_i ds \right]_k = 0 \quad (3.18)$$

除了在物面是曲面形状, 控制体就是实际物理空间区域, 方程 (3.18) 式和 (3.17) 式是等价的。采用算子形式, 上式表示为  $G(u) = 0$ , 解为  $u_e$ , 如果求解变量  $u$ 、对流通量  $f$  和  $g$  是充满整个求解时间和空间区域的连续函数, 控制体可以任意大小,  $u_e$  也是偏微分方程 (3.16) 式的解。

基于离散数字结构体系的计算机技术无法描述以上建立在连续时间和空间区域的方程, 为了适应信息存储和运算速度有限的计算机, 必须对物理量也要进行时间和空间离散处理。采取何种离散方法就构成有限体积法的研究内容。

首先讨论空间离散出现的问题。

从原理上说, 控制体存储位置越多, 精确描述物理量的条件越好。但是, 从目前应用情况看, 除了少量高精度格式文献外, 一个控制体的存储位置只有一点。尽管控制体可以任意形状, 存储物理量的空间位置主要选择两个几何特征点, 如图 3.1 所示意, 一种是控制体的顶点, 称为格点格式 (Vertex Scheme), 另一种是控制体重心, 称为格心格式 (Cell Centered Scheme)。同时, 存储在这一点的值表征整个控制体内物理量, 不一定是当地位置上物理量的实际值。对于格点格式, 平均值通过共用该点的所有控制体内物理量进行体积加权平均得到。对于本文采用的格心格式, 平均值直接采用控制体内物理量积分得到:

$$\bar{u} = \frac{1}{V} \iiint_V u d\sigma \quad (3.19)$$

不管哪一种存储格式, 为了得到方程 (3.17) 式中进出控制体表面的通量积分值, 都需要解决如何采用有限存储位置上物理量来近似空间连续分布变量和函数的问题, 即所谓的空间重构 (Reconstruction) 问题。

有限差分格式计算方法是研究偏微分方程中偏导数的有效近似, 有限体积法的计算方法主要研究空间重构模型。

不考虑控制体随时间变化, 采用离散点上平均值  $\bar{u}$  代替连续分布物理量  $u$  来重构对流通量分布, 假设重构得到边界面上对流通量为  $\bar{f}$  和  $\bar{g}$ , 带入以上控制方程:

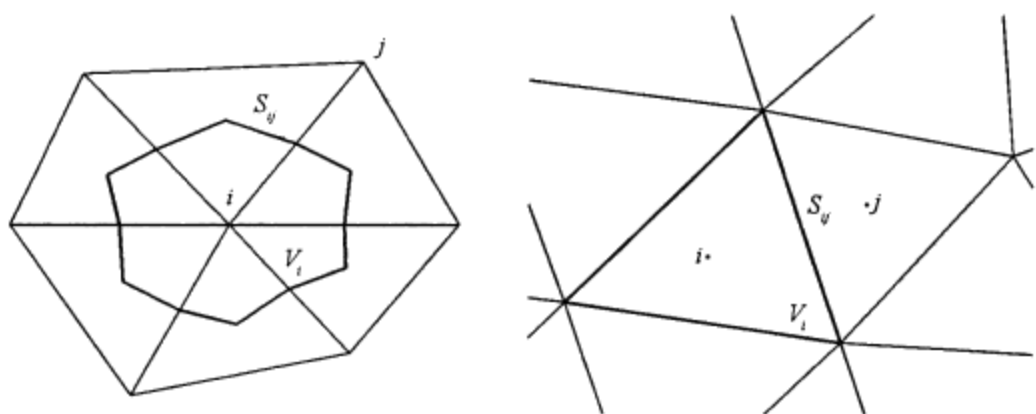


图 3.1 物理量存储位置 (左: 格点格式, 右: 格心格式)

$$\frac{\partial(\bar{u}V)_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^m \left[ \iint_{S_l} [\bar{f}i + \bar{g}j] n_l ds \right]_k \approx 0 \quad (3.20)$$

这是控制方程 (3.18) 的第一次近似。

如果确定  $\bar{f}$  和  $\bar{g}$  在平面  $S_l$  分布规律, 网格生成以后, 构成多边形平面  $S_l$  顶点坐标和法向  $n_l$  已知, 可以消除积分运算。但是, 目前有限体积法的计算方法研究给出大部分重构模型仅考虑了沿法向的变化, 假设  $\bar{f}$  和  $\bar{g}$  在平面  $S_l$  分布不变化, 采用平面中点位置的插值来代替:

$$\begin{cases} \hat{f}_l \approx \frac{1}{S_l} \iint_{S_l} \bar{f} ds \\ \hat{g}_l \approx \frac{1}{S_l} \iint_{S_l} \bar{g} ds \end{cases} \quad (3.21)$$

因此, 出现控制方程 (3.18) 的第二次近似。

为统一符号, 记  $\bar{u} = \hat{u}$ , 得到空间计算模型:

$$\frac{\partial(\hat{u}V)_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^m [(\hat{f}_l i + \hat{g}_l j) n_l S_l]_k = 0 \quad (3.22)$$

时间方向也离散以后, 就可以编程进行计算。

不考虑时间离散, 离散方程算子记为  $G_\Delta(\hat{u}_k) = 0$ , 其中  $\hat{u}_k(t)$  为方程的数值解。空间重构就是采用离散算子  $G_\Delta(\hat{u}_k)$  近似积分算子  $G(u)$ , 因此, 引出精度问题和稳定性问题。

### § 3.3 有限体积方法分析理论

在目前的 CFD 基础理论中还没有专门讨论有限体积方法的著作, 下面根据以上有限差分方法的理论来建立有限体积方法的分析方法。

#### § 3.3.1 精度分析方法

首先推广有限差分方法的空间局部截断误差定义, 来讨论精度问题。

从量级分析角度, 建立有限体积法时积分本身就是小量  $V_k \sim O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ , 因此半离散积分方程的空间局部截断误差采用如下形式较为合适:

$$\begin{aligned} LTE &= \frac{1}{V_k} |G_\Delta(v)_k - G(v)_k| \\ &= \frac{1}{V_k} \left| \frac{\partial}{\partial t} (\vartheta V_k - \iiint_{V_k} v d\sigma) + \sum_{i=1}^m \left[ (\hat{f}_i i + \hat{g}_i j) n_i S_i - \iint_{S_i} (f i + g j) n_i ds \right] \right| \\ &= \frac{1}{V_k} \left| \sum_{i=1}^m \left[ \iint_{S_i} (\hat{f} - f) i \cdot n_i ds + \iint_{S_i} (\hat{g} - g) j \cdot n_i ds \right] \right| \end{aligned} \quad (3.23)$$

对于上述二维线性模型方程, 可以进一步表述为如下两种形式:

$$\begin{aligned} LTE &= \frac{1}{V_k} \left| \sum_{i=1}^m \left[ \iint_{S_i} (\hat{f} - f) dy - \iint_{S_i} (\hat{g} - g) dx \right] \right| \\ &= \frac{1}{V_k} \left| \sum_{i=1}^m \left[ \iint_{S_i} (f - au) dy - \iint_{S_i} (g - bu) dx \right] \right| \end{aligned} \quad (3.24.1)$$

$$LTE = \frac{1}{V_k} \left| \sum_{i=1}^m \left[ \iint_{S_i} \hat{f} dy - \iint_{S_i} \hat{g} dx - \iiint_{V_k} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma \right] \right| \quad (3.24.2)$$

有限差分法中, 采用 Taylor 级数方法, 通过比较离散点上数值解和理论值, 可以写出局部截断误差与空间网格尺度的关系表达式, 分析精度相对容易。但是, 空间重构以后的对流通量为  $\hat{f}$  和  $\hat{g}$  是控制点上物理量  $\bar{u}$  的拟合函数,  $\bar{u}$  本身又是平均值, 根据上面定义直接应用 Taylor 级数方法分析有限体积法的精度变得非常困难。受差分格式的修正方程启发, 本书提出如下有限体积法的精度分析方法, 或称为验证方法。

对于一维模型方程, 半离散格式相应的修正方程写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=p}^{\infty} v_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}$$

对应的空间局部截断误差:

$$LTE_1 = \sum_{l=2}^{\infty} v_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \quad (3.25)$$

空间离散算子一阶精度, 右端第一个非零项的量级为  $v_2 \sim O(\Delta x)$ , 如果求解变量线性分布  $u = a_1 x + a_0$ , 则有  $LTE_1 = 0$ , 即差商就是偏导数的理论值。

例如, 一阶迎风差分格式:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = \frac{a_1 x_i + a_0 - [a_1(x_i - \Delta x) + a_0]}{\Delta x} = a_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i$$

但是, 对于二次函数  $u = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , 则差商不等于偏导数理论值:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} &= \frac{a_2(x_i + \Delta x)^2 + a_1(x_i + \Delta x) + a_0 - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0}{\Delta x} \\ &= 2x_i a_2 + a_2 \Delta x + a_1 \\ &\neq 2x_i a_2 + a_1 \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \end{aligned}$$

空间离散算子二阶精度, 右端第一个非零项的量级为  $v_3 \sim O(\Delta x^2)$ , 如果求解变量二次函数  $u = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , 则有  $LTE_1 = 0$ , 差商是偏导数理论值。

例如, 二阶中心差分格式:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} &= \frac{a_2(x_i + \Delta x)^2 + a_1(x_i + \Delta x) + a_0 - a_2(x_i - \Delta x)^2 - a_1(x_i - \Delta x) - a_0}{2\Delta x} \\ &= 2x_i a_2 + a_1 \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \end{aligned}$$

以此类推, 空间离散算子  $p$  阶精度, 右端第一个非零项的量级为  $v_{p+1} \sim$

$O(\Delta x^p)$ , 把  $p$  次多项式  $u = \sum_{i=0}^p a_i x^i$  带入空间局部截断误差表达式 (3.22) 中, 也有  $LTE_1 = 0$ , 差商计算值就是偏导数理论值。

对于二维模型方程这一结论也成立, 由于对应的修正方程较为复杂, 直接通过例证来说明以上论点。线性分布变量  $u = a_1 x + b_1 y$  带入空间一阶精度离散算子:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{ij} - u_{(i-1)j}}{\Delta x} + \frac{u_{ij} - u_{i(j-1)}}{\Delta y} &= \frac{a_1 x_{ij} + b_1 y_{ij} - [a_1 (x_{ij} - \Delta x) + b_1 y_{ij}]}{\Delta x} \\
&\quad + \frac{a_1 x_{ij} + b_1 y_{ij} - [a_1 x_{ij} + b_1 (y_{ij} - \Delta y)]}{\Delta y} \\
&= a_1 + b_1 \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{ij}
\end{aligned}$$

二次函数分布变量  $u = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$  带入空间二阶精度离散算子:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{(i+1)j} - u_{(i-1)j}}{2\Delta x} + \frac{u_{i(j+1)} - u_{i(j-1)}}{2\Delta y} &= 2x_{ij}a_{11} + a_{12}(x_{ij} + y_{ij}) + 2y_{ij}a_{22} \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{ij}
\end{aligned}$$

按照这一思路分析有限体积法的精度。

以上有限差分精度验证推导中要求网格分布式均匀, 对于非均匀网格需要通过坐标变换为计算区域的均匀网格。对于有限体积也需要采用等面积多面体(三维)或等边多边形(二维)条件, 这个条件也可以通过面积或边线乘以比例系数实现(比例系数合并到通量中)。

首先分析求解变量线性分布  $u = a_1x + b_1y$ , 这种情况下多边形平均值就是格心点的当地物理量。对于如图 3.2 示意的边长为  $\Delta x = \Delta y$  的正方形, 采用有序形式, 所研究控制体格心点编号记为  $(x_{ij}, y_{ij})$ , 得到平均值为:

$$\hat{u}_{ij} = a_1 x_{ij} + b_1 y_{ij} = u(x_{ij}, y_{ij}) \quad (3.26)$$

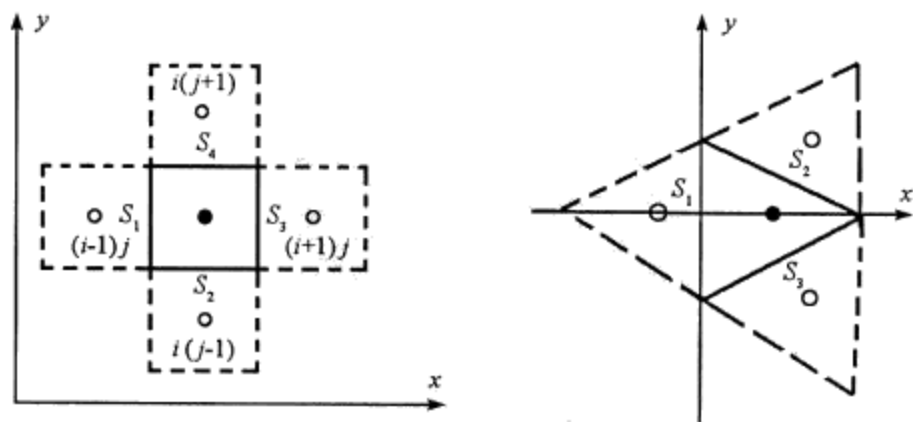


图 3.2 精度分析用到正方形和正三角形

根据迎风性质, 采用上游控制体的平均值作为边界面上重构通量  $\hat{f}$  和  $\hat{g}$ 。

即:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = a\hat{u}_{(i-1)j} \\ \hat{g}_2 = b\hat{u}_{i(j-1)} \\ \hat{f}_3 = a\hat{u}_{ij} \\ \hat{g}_4 = b\hat{u}_{ij} \end{cases} \quad (3.27)$$

其他通量因没有进入控制体而省略。代入截断误差表达式 (3.24.2) 中:

$$\begin{aligned} LTE &= \frac{1}{V_k} \left| \left[ -a\hat{u}_{(i-1)j}\Delta y - b\hat{u}_{i(j-1)}\Delta x + a\hat{u}_{ij}\Delta y + b\hat{u}_{ij}\Delta x - (aa_1 + bb_1)V_k \right] \right| \\ &= \frac{1}{V_k} \left| \left[ a(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{(i-1)j})\Delta y + b(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i(j-1)})\Delta x - (aa_1 + bb_1)V_k \right] \right| \\ &= \left| \left[ \frac{a(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{(i-1)j})}{\Delta x} + \frac{b(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i(j-1)})}{\Delta y} - (aa_1 + bb_1) \right] \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

推广差分法的精度定义, 根据  $LTE = 0$ , 得出结论: 对于正方形网格, 采用单边物理量的直接重构边界面上通量的有限体积方法具有一阶精度。

分析求解变量二次分布  $u = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ , 在积分区域为:

$$x \in [x_{ij} - 0.5\Delta x, x_{ij} + 0.5\Delta x] \text{ 和 } y \in [y_{ij} - 0.5\Delta y, y_{ij} + 0.5\Delta y]$$

对于正方形控制体进行积分, 平均值为:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{ij} &= a_{11}x_{ij}^2 + a_{12}x_{ij}y_{ij} + a_{22}y_{ij}^2 + \frac{a_{11}(\Delta x)^2 + a_{22}(\Delta y)^2}{12} \\ &= u(x_{ij}, y_{ij}) + \frac{a_{11}(\Delta x)^2 + a_{22}(\Delta y)^2}{12} \end{aligned} \quad (3.28)$$

可以看出, 正方形平均值不再是格心点  $(x_{ij}, y_{ij})$  的当地物理量, 二者之间差异与网格尺度  $(\Delta x, \Delta y)$  和方程系数  $(a_{11}, a_{22})$  相关, 这个特征体现了有限差分法和有限体积法之间不能直接替换。

采用 (3.27) 形式带入表达式 (3.24.2) 中, 得:

$$LTE = \frac{1}{V_k} \left| aa_{11}(\Delta x)^2 + ba_{22}(\Delta y)^2 \right| \neq 0$$

得到结论: 采用单边物理量的直接重构边界面上通量的有限体积方法没有二阶精度, 与前面有限差分法结论一致。

如果采用边界面两侧控制体平均值的平均方法重构通量  $\hat{f}$  和  $\hat{g}$ , 即:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = \frac{1}{2} a (\hat{u}_{(i-1)j} + \hat{u}_{ij}) \\ \hat{g}_2 = \frac{1}{2} b (\hat{u}_{i(j-1)} + \hat{u}_{ij}) \\ \hat{f}_3 = \frac{1}{2} a (\hat{u}_{ij} + \hat{u}_{(i+1)j}) \\ \hat{g}_4 = \frac{1}{2} b (\hat{u}_{ij} + \hat{u}_{i(j+1)}) \end{cases} \quad (3.29)$$

把以上线性分布推导结果代入截断误差表达式 (3.24.2) 中, 有  $LTE = 0$ , 把二次分布推导结果代入同样有  $LTE = 0$ , 因此, 得到结论: 对于正方形网格, 两侧控制体平均值的平均方法重构边界面上通量的有限体积方法二阶精度。

重构方法形式也可以写为控制体两侧平均值的线性插值形式:

$$\begin{cases} f_1 = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{(i-1)j}}{x_{ij} - x_{(i-1)j}} (x_{11} - x_{ij}) \right] = a [\hat{u}_{ij} + k_{ij}^- (x_{11} - x_{ij})] \\ \hat{f}_3 = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{\hat{u}_{(i-1)j} - \hat{u}_{ij}}{x_{(i-1)j} - x_{ij}} (x_{13} - x_{ij}) \right] = a [\hat{u}_{ij} + k_{ij}^+ (x_{11} - x_{ij})] \end{cases} \quad (3.30)$$

式中  $k_{ij}^-$  和  $k_{ij}^+$  可以理解为采用迎风格式求出的格心点  $(x_{ij}, y_{ij})$  的差商, 在按照这一思路, 如果差商中心格式求解, 采用进一步可以建立重构方法:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{\hat{u}_{(i+1)j} - \hat{u}_{(i-1)j}}{x_{(i+1)j} - x_{(i-1)j}} (x_{11} - x_{ij}) \right] = a \left[ \hat{u}_{ij} - \frac{1}{4} (\hat{u}_{(i+1)j} - \hat{u}_{(i-1)j}) \right] \\ \hat{f}_3 = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{\hat{u}_{(i+1)j} - \hat{u}_{(i-1)j}}{x_{(i+1)j} - x_{(i-1)j}} (x_{13} - x_{ij}) \right] = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{1}{4} (\hat{u}_{(i+1)j} - \hat{u}_{(i-1)j}) \right] \end{cases} \quad (3.31)$$

也可以采用单边平均值及其差商建立重构方法:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = a \left[ \hat{u}_{(i-1)j} + \frac{\hat{u}_{(i-1)j} - \hat{u}_{(i-2)j}}{x_{(i-1)j} - x_{(i-2)j}} (x_{11} - x_{(i-1)j}) \right] = a \left[ \frac{3}{2} \hat{u}_{(i-1)j} - \frac{1}{2} \hat{u}_{(i-2)j} \right] \\ \hat{f}_3 = a \left[ \hat{u}_{ij} + \frac{\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{(i-1)j}}{x_{ij} - x_{(i-1)j}} (x_{13} - x_{ij}) \right] = a \left[ \frac{3}{2} \hat{u}_{ij} - \frac{1}{2} \hat{u}_{(i-1)j} \right] \end{cases} \quad (3.32)$$

以上 (3.31) 式和 (3.32) 式代入截断误差表达式 (3.24.2) 中, 也有  $LTE = 0$ 。得到结论: 对于正方形网格, 考虑平均值差商的重构方法具有二阶精度。

以上在正方形控制体基础上推导出来的结论和前面差分方程相同, 因此, 一些文献说在结构网格基础上二者等价也是有道理的。但是, 从所描述的物理意义来看还是有较大差别, 首先, 形成通量相减中的负号是控制体表面法向所

致,不是导数离散引起的;第二,  $\bar{a}_v$  是控制体内物理量的平均值,定义差商和 Taylor 级数展开不是十分恰当;第三,表达式 (3.24.2) 中分数形式是除了控制体及以后出现的,也不是差商本身定义;第四,有限差分法中坐标变换系数和有限体积法几何参数之间也存在近似问题。细致的讨论在本章最后一节进行。

当然对于多边形控制体,二者之间完全无法相似了。

如图 3.2 示意的边长为  $\Delta l$  的正三角形,体积  $V_k = \frac{\sqrt{3}}{4}(\Delta l)^2$ 。从原理上分析,平移坐标系对于通量积分值没有影响,为便于求解,采用图示坐标。

首先,分析变量线性分布:  $u = a_1 x + b_1 y$ , 平均值就是格心点的当地物理量,所研究控制体格心点  $x_k = \frac{\sqrt{3}}{6} \Delta l$ ,  $y_k = 0$ , 周围格心点位置分别为  $(-\frac{\sqrt{3}}{6} \Delta l, 0)$ 、 $(\frac{\sqrt{3}}{3} \Delta l, \frac{1}{2} \Delta l)$  和  $(\frac{\sqrt{3}}{3} \Delta l, -\frac{1}{2} \Delta l)$ , 代入函数可以得到对应的平均值  $\bar{a}$ 。采用类似于 (3.27) 式重构:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = a\bar{a}_1 \\ \hat{f}_2 = a\bar{a}_k \\ \hat{g}_2 = b\bar{a}_k \\ \hat{f}_3 = a_k\bar{a}_k \\ \hat{g}_4 = b\bar{a}_3 \end{cases} \quad (3.33)$$

通量  $\hat{g}_1 = b\bar{a}_1$ , 没有进入控制体。通量积分为:

$$\begin{aligned} & -\hat{f}_1 \Delta l + \hat{f}_2 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{f}_3 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{g}_2 \Delta l \cos 30^\circ - \hat{g}_3 \Delta l \cos 30^\circ \\ & = (-a\bar{a}_1 + a\bar{a}_k \sin 30^\circ + a\bar{a}_k \sin 30^\circ + b\bar{a}_k \cos 30^\circ - b\bar{a}_3 \cos 30^\circ) \Delta l \end{aligned}$$

把这些已知条件代入截断误差表达式 (3.24.2) 中, 推得  $LTE \neq 0$ , 得出结论: 有限体积方法对网格形状有要求, 正方形网格条件下具有一阶精度的单边迎风重构方法, 对于三角形网格达不到一阶精度。

变量线性分布条件下, 平均值两点之间的差商是常数, 因此, 以上从 (3.29) 式到 (3.32) 式是等价的, 以 (3.30) 式为例进行验证。各条边界面上重构通量如下:

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = \frac{1}{2} a (\hat{u}_1 + \hat{u}_k) \\ \hat{f}_2 = \frac{1}{2} a (\hat{u}_2 + \hat{u}_k) \\ \hat{g}_2 = \frac{1}{2} b (\hat{u}_2 + \hat{u}_k) \\ \hat{f}_3 = \frac{1}{2} a (\hat{u}_3 + \hat{u}_k) \\ \hat{g}_3 = \frac{1}{2} b (\hat{u}_3 + \hat{u}_k) \end{cases} \quad (3.34)$$

通量积分为：

$$\begin{aligned} & -\hat{f}_1 \Delta l + \hat{f}_2 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{f}_3 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{g}_2 \Delta l \cos 30^\circ - \hat{g}_3 \Delta l \cos 30^\circ \\ &= \left[ \frac{1}{4} a (\hat{u}_2 + \hat{u}_3 + 2\hat{u}_k) + \frac{\sqrt{3}}{4} b (\hat{u}_2 - \hat{u}_3) \right] \Delta l \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (aa_1 + bb_1) \Delta l^2 \\ &= (aa_1 + bb_1) V_k \end{aligned}$$

把这些已知条件代入截断误差表达式 (3.24.2) 中，推得  $LTE = 0$ 。得到结论：对于三角形网格，考虑平均值差商的重构方法具有一阶精度。

下面，分析变量二次分布：分布  $u = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ ，对图 3.2 中三角形，其控制体内的平均值：

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\bar{y}} &= a_{11}x_{\bar{y}}^2 + a_{12}x_{\bar{y}}y_{\bar{y}} + a_{22}y_{\bar{y}}^2 + \frac{(a_{11} + a_{22})(\Delta l)^2}{24} \\ &= u(x_{\bar{y}}, y_{\bar{y}}) + \frac{(a_{11} + a_{22})(\Delta l)^2}{24} \end{aligned} \quad (3.35)$$

与正方形类似，二次分布时三角形内的平均物理量不等于格心物理量  $u(x_{\bar{y}}, y_{\bar{y}})$ ，它们的差值仅与网格尺度和分布系数有关，而与三角形的位置无关。

如果采用边界面两侧控制体物理量的平均值来计算面元通量，即采用 (3.34) 式计算边界面通量，得到通量为：

$$\begin{aligned} & -\hat{f}_1 \Delta l + \hat{f}_2 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{f}_3 \Delta l \sin 30^\circ + \hat{g}_2 \Delta l \cos 30^\circ - \hat{g}_3 \Delta l \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{8} (aa_{11} + aa_{22} + 2ba_{12}) \Delta l^3 \end{aligned}$$

再将通量代入 (3.24.2) 中，结果得到

$$LTE = \frac{\sqrt{3}}{6} (-aa_{11} + aa_{22} + ba_{12}) \Delta l \neq 0$$

也就是说,对于三角形网格,考虑平均值差商的重构方法不具有二阶精度。

目前非结构有限体积方法中常用的两种二阶格式分别是中心格式和迎风格式。中心格式即通过 (3.34) 式计算面元通量,而迎风型格式是首先计算单元梯度,然后将两侧单元中心的物理量采用泰勒展开至面元两侧,再采用迎风方法计算面元通量。从上面的分析可以看出,中心格式 (3.34) 式是不具有二阶精度的,下面分析迎风型方法的精度。

对迎风型方法,首先要计算出各个控制体内物理量的梯度。对二次分布的物理量而言,控制体格心的物理量梯度的精确值为:

$$\text{grad}u_{ij} = (2a_{11}x^2 + a_{12}y)i + (a_{12}x + 2a_{22}y)j \quad (3.36)$$

采用泰勒公式将物理量由控制体中心展开到控制体边界面的中心点上:

$$u_b = u_{ij} + \text{grad}u_{ij} \cdot \mathbf{r}_b \quad (3.37)$$

其中  $\mathbf{r}_b$  为边界面中心点相对于控制体中心点的矢径。将边界面另一侧控制体的物理量按同样的方法展开至边界面中心点处,然后利用边界面中心点处的这两个物理量,按照迎风原则选取其中一个来计算此边界面的通量。可以证明,对图 3.2 所示三角形及二次分布的物理量,按照上述方法得到的计算格式能够导出  $LTE = 0$ ,也即具有二阶精度。但在实际中,对二次分布的物理量,常用的 Green 公式及最小二乘求梯度法都得不到梯度的精确值。

综合上面的分析可以得出:对于正方形网格,采用单边物理量直接重构边界面上通量的有限体积方法具有一阶精度,考虑平均值差商的重构方法具有二阶精度。对三角形网格,单边物理量直接重构的方法不具有二阶精度,而考虑平均值差商的方法也仅有一阶精度;采用精确梯度值的迎风型格式可以得到二阶精度,但梯度的精确值很难得到。

如果考虑更高阶的精度,如三阶精度,分析物理量为三次分布的情况:

$$u = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

对正方形控制体进行积分,得到正方形内的平均值:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{ij}-0.5\Delta x}^{x_{ij}+0.5\Delta x} \int_{y_{ij}-0.5\Delta y}^{y_{ij}+0.5\Delta y} (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) dy dx \\ &= a_{30}x_{ij}^3 + a_{21}x_{ij}^2y_{ij} + a_{12}x_{ij}y_{ij}^2 + a_{03}y_{ij}^3 + d_{ij} \\ &= u_{ij} + d_{ij} \end{aligned} \quad (3.38)$$

其中  $d_{\bar{y}}$  是体积平均值与单元格心值之差:

$$d_{\bar{y}} = \frac{1}{4} a_{30} x_{\bar{y}} \Delta x^2 + \frac{1}{12} a_{21} y_{\bar{y}} \Delta x^2 + \frac{1}{12} a_{12} x_{\bar{y}} \Delta y^2 + \frac{1}{4} a_{03} y_{\bar{y}} \Delta y^2 \quad (3.39)$$

可见此差值不仅与网格尺度和物理量的分布情况有关, 而且与网格位置相关, 不同网格的这一差值是不同的, 这对有限体积方法的高阶格式构造带来了极大的困难。

### § 3.3.2 稳定性分析方法

在有限差分方法中, 稳定性分析通常采用基于离散 Fourier 级数的 von Neumann 方法, 但将其推广至多维有限体积方法时, 公式十分复杂, 难以分析。而且, von Neumann 方法仅适用于线性系统的稳定性分析, 而目前常用的二阶迎风型格式都具有很强的非线性性。在这里, 我们采用“正条件”(positivity condition) 方法来分析有限体积方法的稳定性。

正条件是 Harten 在关于 TVD 格式的著名论文中提出的, 它已成为一种重要的非线性稳定性分析的手段<sup>[42]</sup>。正条件比 TVD 的要求更强, 也就是说, 一个格式满足正条件, 那么它一定是 TVD 的。

首先介绍一维有限差分方法中的正条件。对一般的三点格式, 可写为如下的形式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+1/2}^+ (u_{i+1}^n - u_i^n) - C_{i-1/2}^- (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (3.40)$$

正条件是指, 对于所有的  $i$ , 下面的式子成立:

$$\begin{cases} C_{i+1/2}^+ \geq 0 \\ C_{i+1/2}^- \geq 0 \\ C_{i+1/2}^+ + C_{i+1/2}^- \leq 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

Barth 将此条件推广至有限体积方法中<sup>[43]</sup>, 具体描述为, 对如下形式的有限体积格式:

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\Delta t}{V_k} \sum_{j=1}^{ns} C_{jk} (u_j^n - u_k^n) \quad (3.42)$$

正条件为

$$\begin{cases} C_{jk} \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, ns) \\ 1 - \frac{\Delta t}{V_k} \sum_{j=1}^{ns} C_{jk} \geq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

其中  $ns$  是第  $k$  个控制体的边界面的总数,  $j$  为单元  $k$  的邻居。

下面采用正条件来分析迎风型和中心型有限体积方法的稳定性。为了推导的简便, 仍对 (3.16) 中的线性模型方程进行分析。

对中心格式, 边界面上的通量为

$$f_{jk} = \frac{a}{2} (u_j^n + u_k^n), \quad g_{jk} = \frac{b}{2} (u_j^n + u_k^n)$$

将其代入下面的离散公式中:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{V} \sum_{j=1}^{ns} [f_{jk} S_{jk}^x + g_{jk} + S_{jk}^y] \quad (3.44)$$

可以写出中心格式的离散公式:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{V} \sum_{j=1}^{ns} \left[ a \frac{u_j^n + u_k^n}{2} \cdot S_{jk}^x + b \frac{u_j^n + u_k^n}{2} \cdot S_{jk}^y \right] \quad (3.45)$$

其中  $S_{jk}^x$  和  $S_{jk}^y$  的定义是: 矢量  $\mathbf{n} = S_{jk}^x \mathbf{i} + S_{jk}^y \mathbf{j}$  是单元  $j$ 、 $k$  间边界面的矢量面积, 也即边界面的法向矢量, 由单元  $k$  指向单元  $j$ , 且矢量的模等于边界面的面积。由于控制体是封闭的, 有

$$\sum_{j=1}^{ns} S_{jk}^x = \sum_{j=1}^{ns} S_{jk}^y = 0 \quad (3.46)$$

将 (3.45) 式整理成 (3.42) 的形式, 其中的系数为

$$C_{jk} = \frac{1}{2} (aS_{jk}^x + bS_{jk}^y) \quad (3.47)$$

根据 (3.46) 式, 可知  $\sum_{j=1}^{ns} C_{jk} = 0$ , 因此  $C_{jk}$  必定有正有负, 不满足正条件。计算也表明, 中心格式 (3.45) 是不稳定的。

对迎风格式, 边界面上的通量为

$$f_{jk} S_{jk}^x = \frac{aS_{jk}^x + |aS_{jk}^x|}{2} u_k + \frac{aS_{jk}^x - |aS_{jk}^x|}{2} u_j$$

$$g_{jk} S_{jk}^y = \frac{bS_{jk}^y + |bS_{jk}^y|}{2} u_k + \frac{bS_{jk}^y - |bS_{jk}^y|}{2} u_j$$

将其代入 (3.44) 中, 并写为 (3.42) 的形式, 其中的系数为

$$C_{jk} = \frac{1}{2} (|aS_{jk}^x| - aS_{jk}^x) + \frac{1}{2} (|bS_{jk}^y| - bS_{jk}^y) \quad (3.48)$$

可见  $C_{jk} \geq 0$ 。将上式代入 (3.43) 中, 得到稳定性条件为

$$\Delta t \leq \frac{V}{\frac{1}{2} (|a| \cdot \sum_1^{ns} |S_{jk}^x| + |b| \cdot \sum_1^{ns} |S_{jk}^y|)} \quad (3.49)$$

如果控制体是凸的, 那么有  $\sum_1^m |S_k^x| = 2S_k^{(x)}$ ,  $\sum_1^m |S_k^y| = 2S_k^{(y)}$ , 其中  $S_k^{(x)}$ 、 $S_k^{(y)}$  分别是控制体在  $y$  轴和  $x$  轴上的投影长度。最终, 迎风格式的稳定性条件可以写为:

$$\Delta t \leq \frac{V}{|a|S_k^{(x)} + |b|S_k^{(y)}} \quad (3.50)$$

### § 3.4 非结构网格的有限体积方法

对非结构单元进行离散, 通常采用有限体积方法。按照控制体的取法不同, 可将有限体积方法分为格心格式和格点格式 (如图 3.1)。格心格式的控制体就是网格单元本身, 物理量存储在单元中心; 格点格式是以网格点为中心构造控制体, 物理量存储在网格点上。在本书中均采用格心格式离散。

#### § 3.4.1 控制方程

三维非定常 Euler 方程组可写成如下形式:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3.51)$$

其中:  $Q$  为守恒变量,  $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的无粘通量。具体形式为:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uw \\ \rho uv \\ ((e+p)u) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ ((e+p)v) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wv \\ ((e+p)w) \end{pmatrix}$$

式中  $e$  为单位体积总能, 其形式为

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2)$$

将 (3.51) 式写为矢量形式, 为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla_x F = 0 \quad (3.52)$$

这里  $F = Fi + Gj + Hk$ ,  $\nabla_x$  表示  $(x, y, z)$  坐标系中的散度算子。对上式

进行体积分, 有

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla_x F dV = 0 \quad (3.53)$$

对第二项应用散度定理, 便可得到积分形式的控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q dV + \oint_S F dS = 0 \quad (3.54)$$

在选定的控制体上, 将 (3.54) 式中的通量项进行离散, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q dV = - \sum_{k=1}^{N_f} F_k \cdot n_k S_k \quad (3.55)$$

式中  $F_k$ 、 $n_k$ 、 $S_k$  分别为第  $k$  个表面边界的通量、外法向单位矢量和面积,  $N_f$  为控制体的表面个数。

### § 3.4.2 物理量的重构

将 Godunov 格式的思想推广至非结构网格, 认为相邻两个控制体的物理量在边界处形成间断, 将其视为近似一维 Riemann 问题, 求解此 Riemann 问题可得到边界通量  $F_x$ , 即  $F_k = F(Q_L, Q_R)$ ,  $Q_L$ 、 $Q_R$  的定义如图 3.3 所示。于是, 不同的求解方法的区别便在于: (1) 如何构造单元边界上的物理量  $Q_L$ 、 $Q_R$ ; (2) 如何计算通量  $F(Q_L, Q_R)$ 。

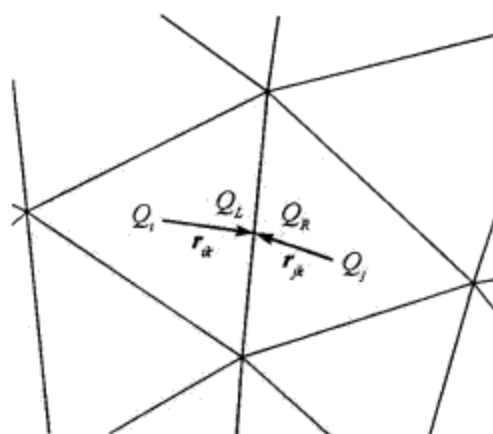


图 3.3 变量定义方式示意图

最简单的重构方法是假设物理量为分片常数分布, 在每个控制体内为常数, 那么单元边界上的值就等于单元中心的值, 即  $Q_L = Q_i$ ,  $Q_R = Q_j$ 。但这种

做法等价于一阶空间离散，数值耗散很大。为了提高精度，可假设物理量在每个控制体内线性分布，这便构成了空间二阶格式。在二阶格式中，边界单元的值可表示为

$$\begin{cases} Q_L = Q_i + \nabla Q_i \cdot r_{ik} \\ Q_R = Q_j + \nabla Q_j \cdot r_{jk} \end{cases} \quad (3.56)$$

式中变量的定义可参见图 3.3。

(3.56) 式中物理量的梯度可通过 Green 公式或最小二乘方法得到，以 Green 公式为例，其形式为

$$\iiint_V \nabla Q dV = \oint_S Q \cdot n dS \quad (3.57)$$

对其离散，得到

$$\nabla Q = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N_f} Q_k n_k S_k \quad (3.58)$$

上式中  $Q_k$  为第  $k$  个边界上物理量的近似值，可通过该边界面的几个顶点的值平均得到：

$$Q_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_i \quad (3.59)$$

$N_p$  为此边界面的顶点的个数， $Q_i$  为其第  $i$  个顶点的物理量。在格心格式中，物理量存储在网格中心，网格点上的值需要由格心值加权平均得到：

$$Q_i = \frac{\sum_{m=1}^N \omega_{c,m} Q_{c,m}}{\sum_{m=1}^N \omega_{c,m}} \quad (3.60)$$

其中  $\omega$  为权函数，下标  $c, m$  表示周围第  $m$  个单元的网格中心。

在 (3.60) 式中，具有严格二阶精度的权函数的形式十分复杂，通常采用的是一种简化形式：

$$\omega_{c,m} = \frac{1}{r_m} \quad (3.61)$$

$$r_m = [(x_{c,m} - x_i)^2 + (y_{c,m} - y_i)^2 + (z_{c,m} - z_i)^2]^{1/2}$$

这种权函数不是严格的二阶精度，研究表明其空间精度约为 1.85 阶。

### § 3.4.3 限制器

在跨声速和超声速计算中,为了抑制激波附近可能出现的非物理振荡,保持数值格式的单调性,需要使用限制器。限制器通过对物理量的梯度进行限制,从而避免在重构过程中出现新的极值。使用限制器后,重构公式 (3.56) 可写为:

$$\begin{cases} Q_L = Q_i + \phi_i \nabla Q_i \cdot r_{ik} \\ Q_R = Q_j + \phi_j \nabla Q_j \cdot r_{jk} \end{cases} \quad (3.62)$$

$\phi_i$ 、 $\phi_j$  分别为单元  $i$ 、 $j$  内的限制器值。

Barth 和 Jespersen 等人提出了一种应用广泛的限制器,其单元的限制器值是其各个表面限制器值的最小值,即

$$\phi_i = \min\{\phi_{ik} \mid k = 1, \dots, N_f\} \quad (3.63)$$

$$\phi_{ik} = \begin{cases} \phi\left(\frac{Q_i^{\max} - Q_i}{Q_{ik} - Q_i}\right) & \text{if } Q_{ik} > Q_i \\ \phi\left(\frac{Q_i - Q_{ik}}{Q_i - Q_i^{\min}}\right) & \text{if } Q_{ik} < Q_i \\ 1 & \text{if } Q_{ik} = Q_i \end{cases} \quad (3.64)$$

其中  $\phi_{ik}$  表示  $i$  单元的第  $k$  个表面的限制器值,  $Q_i^{\max}$ 、 $Q_i^{\min}$  分别是第  $i$  个单元及其周围单元的物理量的最大、最小值,  $Q_{ik}$  是未使用限制器时边界的物理量值,即 (3.62) 式中  $\phi_i = 1$  时的  $Q_L$ 。

Barth 限制器要求每个表面处的重构值都介于  $Q_i^{\max}$  和  $Q_i^{\min}$  之间,其限制函数为

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \min\left(1, \frac{x}{y}\right) \quad (3.65)$$

Barth 限制器具有 TVD 性质,能很好地抑制激波前后的振荡,然而此限制器的耗散较大,具有收敛性差、分辨率低的缺点,为此,Venkatakrishnan 对此限制器进行了改进,改进后的限制函数为

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2 + 2xy + \epsilon^2}{x^2 + xy + 2y^2 + \epsilon^2} \quad (3.66)$$

其中  $\epsilon^2 = (K\bar{\Delta})^3$ ,  $\bar{\Delta}$  代表网格尺度,  $K$  是一个表明限制器限制严厉程序的参数,小于此参数的振荡是允许的,限制器不做处理。 $K=0$  意味着限制器在接近常数分布的区域依然起作用,  $K$  很大时,意味着限制器几乎不起作用。

### § 3.4.4 通量计算

目前,迎风格式主要可分为三类:矢通量分裂格式 FVS (Flux Vector Splitting)、通量差分分裂格式 FDS (Flux Difference Splitting) 以及混合型迎风格式,这三类格式的代表分别是 van Leer, Roe 和 AUSM 格式。van Leer 格式捕捉强间断的能力很强,可靠性高,而且格式简单,计算量小,广泛应用于 Euler 方程的求解;但其数值耗散较大,会抹平接触间断,导致显著的粘性区计算误差,因而不适合于粘性计算。Roe 格式的精度及粘性分辨率都很高,适合于 N-S 方程的数值求解,但原始的 Roe 格式在强激波后会产生非物理的紊乱信号 (Carbuncle 现象),需要进行熵修正;而熵修正依赖于经验参数,且会降低格式的粘性分辨率。AUSM 格式可看作是 FVS 和 FDS 的混合格式,它兼有 van Leer 格式的可靠性和 Roe 格式的高分辨率。AUSM 格式的数值耗散小,具有对激波和接触间断的高分辨率,无需熵修正,具有标量的保正性,而且计算量仅与 van Leer 格式相当。

#### § 3.4.4.1 van Leer 格式

采用 van Leer 分裂方法时,流通矢量表示为马赫数的函数,对于超声速和亚声速情况有不同的处理方式。 $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的流通矢量可以写成统一的形式。令:

$$\Phi = \xi_1 E + \xi_2 F + \xi_3 G \quad (3.67)$$

$$U = \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w \quad (3.68)$$

则

$$\begin{cases} E = \Phi |_{\xi_1=1, \xi_2=0, \xi_3=0} \\ E^* = \Phi^* |_{\xi_1=1, \xi_2=0, \xi_3=0} \\ F = \Phi |_{\xi_1=0, \xi_2=1, \xi_3=0} \\ F^* = \Phi^* |_{\xi_1=0, \xi_2=1, \xi_3=0} \\ G = \Phi |_{\xi_1=0, \xi_2=0, \xi_3=1} \\ G^* = \Phi^* |_{\xi_1=0, \xi_2=0, \xi_3=1} \end{cases} \quad (3.69)$$

$$M = \frac{U}{a} \quad (3.70)$$

其中  $a$  为声速。

当  $M \geq 1$  时,

$$\Phi^+ = \Phi, \Phi^- = 0 \quad (3.71)$$

当  $M \leq -1$  时,

$$\Phi^+ = 0, \Phi^- = \Phi \quad (3.72)$$

当  $|M| < 1$  时,

$$\Phi^\pm = \begin{bmatrix} f_{mass}^\pm \\ f_{mass}^\pm \left[ u + \frac{\xi_1(-U \pm 2a)}{\gamma} \right] \\ f_{mass}^\pm \left[ v + \frac{\xi_2(-U \pm 2a)}{\gamma} \right] \\ f_{mass}^\pm \left[ w + \frac{\xi_3(-U \pm 2a)}{\gamma} \right] \\ f_{energy}^\pm \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$f_{mass}^\pm = \pm \frac{\rho a}{4} (M \pm 1)^2$$

$$f_{energy}^\pm = f_{mass}^\pm \left[ \frac{(1-\gamma)U^2 \pm 2(\gamma-1)Ua + 2a^2}{\gamma^2 - 1} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right]$$

### § 3.4.4.2 AUSM<sup>+</sup> 格式

在 AUSM 类格式中, 首先将无粘通量分解为对流项和压力项两部分, 以  $x$  方向无粘通量为例:

$$F = F^{(c)} + P \quad (3.74)$$

其中

$$F^{(c)} = u\Psi = Ma\Psi$$

$$\Psi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho h)^T$$

$$P = (0, p, 0, 0, 0)^T$$

可以看到, 对流项仅包含马赫数  $M$ , 当地声速  $a$  以及相应的流动特征通量, 压力项仅包含了压力。

定义界面上的数值通量为

$$\begin{cases} F_{1/2} = M_{1/2} a_{1/2} \Psi_{1/2} \\ P_{1/2} = (0, p_{1/2}, 0, 0, 0)^T \end{cases} \quad (3.75)$$

对流项中的  $\Psi_{1/2}$  采用迎风一阶外推:

$$\Psi_{1/2} = \begin{cases} \Psi_L & M_{1/2} \geq 0 \\ \Psi_R & M_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

AUSM<sup>+</sup> 格式中, 界面马赫数和界面压力的定义为

$$\begin{cases} M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- \\ M_{LR}^* = M_\beta^* (M_{LR}) \end{cases} \quad (3.77)$$

$$\begin{cases} p_{1/2} = P_L^+ p_L + P_R^- p_R \\ P_{LR}^* = P_a^* (M_{LR}) \end{cases} \quad (3.78)$$

其中  $M_{L,R} = u_{L,R}/a_{1/2}$ 。

界面声速  $a_{1/2}$  以及  $M_\beta^*$ 、 $P_a^*$  的定义为:

$$\begin{cases} a_{1/2} = \min(\tilde{a}_L, \tilde{a}_R) \\ \tilde{a} = a^{*2}/\max(a^*, |u|) \end{cases} \quad (3.79)$$

$$M_\beta^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \beta(M^2 - 1)^2 & |M| < 1 \end{cases} \quad (3.80)$$

$$P_a^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)) & |M| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \alpha M(M^2 - 1)^2 & |M| < 1 \end{cases} \quad (3.81)$$

其中  $a^*$  为临界声速, 参数  $\alpha = \frac{3}{16}$ ,  $\beta = \frac{1}{8}$ 。

### § 3.4.4.3 AUSM<sup>+</sup> - up 格式

AUSM<sup>+</sup> - up 格式是 AUSM 类格式的最新改型, 它在 AUSM<sup>+</sup> 格式的基础上, 改进了界面马赫数和界面压力的计算, 提高了格式的收敛性, 尤其是对低速问题的鲁棒性和计算精度。新的界面马赫数和界面压力的定义为

$$\begin{cases} M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- + M_p \\ M_{LR}^* = M_\beta^* (M_{LR}) \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\begin{cases} p_{1/2} = P_L^+ p_L + P_R^- p_R + p_u \\ P_{LR}^* = P_a^* (M_{LR}) \end{cases} \quad (3.83)$$

其中  $M_{L,R} = u_{L,R}/a_{1/2}$ 。

$M_p$ 、 $p_u$  分别为压力扩散和速度扩散项：

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\rho_{1/2} a_{1/2}^2} \quad (3.84)$$

$$p_u = -K_u P_L^+ P_R^- (\rho_L + \rho_R) (f_a a_{1/2}) (u_R - u_L) \quad (3.85)$$

参数定义：

$$\rho_{1/2} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}$$

$$\bar{M}^2 = \frac{u_L^2 + u_R^2}{2a_{1/2}^2}$$

$$M_0^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_\infty^2)) \in [0, 1]$$

$$f_a(M_0) = M_0(2 - M_0) \in [0, 1]$$

$$\alpha = \frac{3}{16}(5f_a^2 - 4), \quad \beta = \frac{1}{8}$$

系数  $K_p$ 、 $K_u$ 、 $\sigma$  的取值为：

$$K_p = 0.25, \quad K_u = 0.75, \quad \sigma = 1.0$$

### § 3.4.5 时间离散

对 (3.55) 式的时间导数进行离散，并注意到网格单元中心点处的变量值是单元平均值的二阶近似，以单元  $i$  为例，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint Q dV = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{Q}_i V_i) \approx V_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad (3.86)$$

其中  $V_i$  是单元  $i$  的体积， $\bar{Q}_i$  和  $Q_i$  分别是守恒变量在单元  $i$  中的平均值和中心点处的值。于是对于单元  $i$ ，(3.55) 式可改写为

$$V_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} = RHS_i \quad (3.87)$$

其中  $RHS_i$  为 (3.55) 式中的右端项，采用前面所述的空间离散方法计算。

对于定常流场的计算，时间精度并不重要，为加快收敛速度，采用简单的一阶前差，即

$$V_i \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = RHS_i^n$$

或者

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} RHS_i^n \quad (3.88)$$

在上式中  $n$  表示时间层,  $\Delta t$  是时间步长。

对于非定常流场的计算, 要求时间离散具有较高的精度。显式多步 Runge-Kutta 方法可以满足一般非定常流场计算的要求。 $m$  步 Runge-Kutta 方法可表示为

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} + \sigma_k \frac{\Delta t}{V_i} RHS_i^{(k-1)} \\ \sigma_k &= \frac{1}{m-k+1} \quad k=1, 2, \dots, m \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(m)} \end{aligned} \quad (3.89)$$

最为常用的是四步 Runge-Kutta 方法, 具有二阶时间精度。

在定常流场的计算中, 采用当地时间步长可以使数值解的时间步进仅受当地稳定性条件限制, 从而有效地加快了收敛速度。对于单元  $i$ , 时间步长应满足

$$\Delta t_i \leq CFL \frac{V_i}{A_i + B_i + C_i} \quad (3.90)$$

其中

$$\begin{aligned} A_i &= (|u_i| + a_i) S_i^{(x)} \\ B_i &= (|v_i| + a_i) S_i^{(y)} \\ C_i &= (|w_i| + a_i) S_i^{(z)} \end{aligned}$$

CFL 是库朗数 (Courant-Friedricks-Leury number),  $a_i$  是当地声速,  $V_i$  是单元  $i$  的体积,  $S_i^{(x)}$ 、 $S_i^{(y)}$ 、 $S_i^{(z)}$  分别是单元  $i$  在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的特征投影面积。

非定常流场计算中应采用全场统一时间步长, 全场时间步长是所有当地时间步长的最小值, 即

$$\Delta t = \min(\Delta t_i) \quad (3.91)$$

## § 3.4.6 边界条件

设 $\partial\Omega$ 为位于流场边界上的一个单元表面, 令 $F_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_e(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} dS$ , 则:

$$F_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \left[ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e + p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} \right] dS$$

$$\approx (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e + p \end{pmatrix} S_{\partial\Omega}^{\frac{n+1}{2}} + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} S_{\partial\Omega}^{\frac{n+1}{2}} \quad (3.92)$$

$S_{\partial\Omega}$ 是边界面 $\partial\Omega$ 的面积,  $n_x, n_y, n_z$ 是外法向单位向量 $\mathbf{n}$ 的三个分量,  $\dot{\mathbf{x}}$ 是网格速度矢量,  $\mathbf{U} = (U, V, W)$ 是相对速度矢量。

## 1. 物面边界

采用无粘流的无穿透条件, 即 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。由(3.92)式可知, 边界面通量积分只要求出边界压力即可。边界面 $\partial\Omega$ 上的流动基本变量可由下列式子求出:

$$\begin{cases} p_b = p_{ref}, \rho_b = \rho_{ref} \\ u_b = u_{ref} - [n_x(n_x u + n_y v + n_z w)]_{ref} + n_x(n_x x_t + n_y y_t + n_z z_t) \\ v_b = v_{ref} - [n_y(n_x u + n_y v + n_z w)]_{ref} + n_y(n_x x_t + n_y y_t + n_z z_t) \\ w_b = w_{ref} - [n_z(n_x u + n_y v + n_z w)]_{ref} + n_z(n_x x_t + n_y y_t + n_z z_t) \end{cases} \quad (3.93)$$

上式中下标 $b$ 表示边界参数, 下标 $ref$ 表示边界面 $\partial\Omega$ 所属的网格单元中心点的参数。

## 2. 出、入口边界

针对亚声速出、入口边界, 采用基于Riemann不变量的一维特征线法确定边界上的流动参数, 即无反射边界条件, 令:

$$\begin{cases} RR = \left( u_n + \frac{2a}{\gamma-1} \right)_i = \left( u_n + \frac{2a}{\gamma-1} \right)_b \\ RL = \left( u_n - \frac{2a}{\gamma-1} \right)_\infty = \left( u_n - \frac{2a}{\gamma-1} \right)_b \end{cases} \quad (3.94)$$

上式中  $u_n$  表示沿边界法向的速度值，下标  $i$  表示边界面  $\partial\Omega$  所属的网格单元中心点的参数，下标  $\infty$  表示无穷远来流参数。由 (3.94) 式可解出边界上的法向速度、声速及马赫数：

$$\begin{cases} u_{nb} = \frac{1}{2}(RR + RL) \\ a_b = \frac{\gamma-1}{4}(RR - RL) \\ M_{\infty n} = u_{nb}/a_b \end{cases} \quad (3.95)$$

(1) 亚声速入口边界 ( $|M_{\infty n}| < 1$ ,  $u_{nb} < 0$ )

可由下列式子求出边界面  $\partial\Omega$  上的所有流动参数。

$$\begin{cases} u_b = u_\infty + n_x(u_{nb} - u_{n\infty}) \\ v_b = v_\infty + n_y(u_{nb} - u_{n\infty}) \\ w_b = w_\infty + n_z(u_{nb} - u_{n\infty}) \\ \rho_b = \rho_\infty (a_b^2/a_\infty^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ p_b = a_b^2 \rho_b / \gamma \end{cases} \quad (3.96)$$

(2) 亚声速出口边界 ( $|M_{\infty n}| < 1$ ,  $u_{nb} > 0$ )

$$\begin{cases} u_b = u_{ni} + n_x(u_{nb} - u_n) \\ v_b = v_{ni} + n_y(u_{nb} - u_n) \\ w_b = w_{ni} + n_z(u_{nb} - u_n) \\ \rho_b = \rho_{ni} (a_b^2/a_{ni}^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ p_b = a_b^2 \rho_b / \gamma \end{cases} \quad (3.97)$$

针对超声速出、入口边界采用直接赋值的方法：

(1) 超声速入口边界 ( $|M_{\infty n}| > 1$ ,  $u_{nb} < 0$ )

$$\begin{cases} u_b = u_\infty \\ v_b = v_\infty \\ w_b = w_\infty \\ \rho_b = \rho_\infty \\ p_b = p_\infty \end{cases} \quad (3.98)$$

(2) 超声速出口边界 ( $|M_{\infty}| > 1, u_{nb} > 0$ )

$$\begin{cases} u_b = u_{ni} \\ v_b = v_{ni} \\ w_b = w_{ni} \\ \rho_b = \rho_{ni} \\ p_b = p_{ni} \end{cases} \quad (3.99)$$

### 3. 对称边界

在流场对称面另一侧构造镜像流场区域, 将对称边界面  $\partial\Omega$  认为是内部网格表面, 按对称条件给出流动参数。

## § 3.5 有限差分方法和有限体积方法的差异

有限差分方法和有限体积方法是 CFD 应用领域主要方法, 从前面介绍可以看出二者之间联系密切, 有限体积方法的相容性、精度、稳定性等概念定义和分析理论直接从有限差分方法推广而来。因此, 有些文献认为“有限差分方法和有限体积方法的不同主要是对网格的几何处理方法不同, 而二者没有本质的区别”, “在适当处理几何度量系数条件下, 在一般曲线坐标系下, 守恒型流动方程的有限差分方法等价于物理空间的有限体积方法”。

在结构网格基础上, 一般曲线坐标系下模型方程变换为:

$$\frac{\partial J^{-1}u}{\partial \tau} + \frac{\partial J^{-1}(f\xi_x + g\xi_y)}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}(f\eta_x + g\eta_y)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.100)$$

在计算空间采用下图 3.4 示意网格, 其中虚线构成网格结点, 在网格编号为的黑点位置进行空间离散:

$$\frac{\partial J^{-1}u}{\partial \tau} + (F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}) + (G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (3.101)$$

式中  $F = J^{-1}(f\xi_x + g\xi_y)$  等符号表示曲线坐标系下通量, 与流动和坐标系数有关。

考虑到编号为整数, 则有  $\Delta\xi = \xi_{i,j} - \xi_{i-1,j} = \Delta\eta = \eta_{i,j} - \eta_{i,j-1} = 1$ , 坐标变换产生的导数采用中心差分离散, 那么有:

$$J_{i,j}^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} & \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2} \\ \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2} & \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2} \end{vmatrix} \quad (3.102)$$

假设  $z$  方向单位长度，这是一个体积量纲，记为  $J_{i,j}^{-1} = \bar{V}_{ij}$ ，近似等于包含  $(i, j)$  的实线构成网格单元的体积。根据： $\xi_x|_{i,j} = y_\eta J_{i,j} = \frac{(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{2\bar{V}_{ij}}$ ，可知  $(J^{-1}\xi_x)_{i,j}$  近似等于包含  $(i, j-1)$  和  $(i, j+1)$  两点构成线段在  $y$  轴上投影。考虑  $z$  方向单位长度，进一步采用  $S_{1x}$  和  $S_{3x}$  分别表示包含  $(i, j)$  网格单元的左侧和右侧面积在  $yz$  平面上投影：

$$\begin{cases} S_{1y} = \frac{1}{2} [(J^{-1}\xi_x)_{i,j} + (J^{-1}\xi_x)_{i-1,j}] \\ S_{3y} = \frac{1}{2} [(J^{-1}\xi_x)_{i+1,j} + (J^{-1}\xi_x)_{i,j}] \end{cases}$$

同样可知  $(J^{-1}\xi_y)_{i,j} = -x_\eta$  是该线段在  $x$  轴上投影，采用  $S_{1y}$  和  $S_{3y}$  符号。

对于  $(J^{-1}\eta_x)_{i,j} = -y_\xi$  和  $(J^{-1}\eta_y)_{i,j} = x_\xi$  分别是  $(i-1, j)$  和  $(i+1, j)$  两点构成线段在  $y$  轴和  $x$  轴上投影，也可以引入类似的符号区别上侧和下侧面积  $S_{2x}$ 、 $S_{4x}$ 、 $S_{2y}$  和  $S_{4y}$ 。这些符号代入到进行差分格式的空间离散表达式中：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^{-1}u}{\partial \tau} + (f_{i-\frac{1}{2},j}S_{1y} + g_{i-\frac{1}{2},j}S_{1x}) + (f_{i,j-\frac{1}{2}}S_{2y} + g_{i,j-\frac{1}{2}}S_{2x}) \\ + (f_{i+\frac{1}{2},j}S_{3y} + g_{i+\frac{1}{2},j}S_{3x}) + (f_{i,j+\frac{1}{2}}S_{4y} + g_{i,j+\frac{1}{2}}S_{4x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

可以看出，有限差分方法与有限体积方法得到的形式完全相同，目前文献中广泛采用的观点很有道理。

但是，有限差分方法与有限体积方法的差别还是比较明显的。

首先，二者的控制方程在数学性质差异导致其建立计算方法的原理存在本质区别。有限差分方法从偏微分方程出发建立数值求解模型，计算方法的研究重点是寻找合适的代数差商代替导数，空间流场重构技术不是必需的，有时用到也是为了得到高精度的差商，计算得到的网格结点上数值解就是对应的空间位置物理值的近似。有限体积方法的控制方程是在偏微分方程基础上，应用高斯公式把函数的偏导数转化为函数的面积分，因此，研究计算方法主要寻求空间积分面上物理参数的近似值，必须采用重构来完成，计算得到的存储点上数值解是控制体的平均值，从理论上就可以不等于该点物理值。例如，前面精度

分析中给出了构造空间三阶精度的有限体积方法所遇到的难题，并不是直接推广三阶精度的有限差分方法能解决的。再如，在计算空间采用下图 3.4 示意网格，计算中间黑点位置的差商值，偏导数的方向性要求采用沿虚线拓展来构造有限差分方法，有限体积法的空间积分对方向没有要求，也可以包括叉形点的相邻点进行空间物理量分布特性的重构。

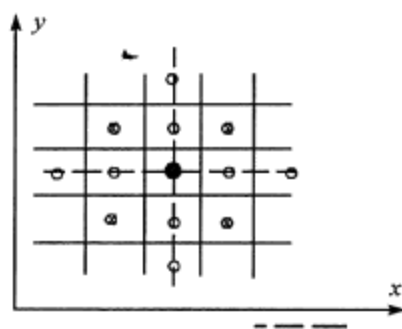


图 3.4 两种方法网格

其次，对有限差分方法和有限体积方法的分析方法有明显差异。如图 3.5 示意，从三维退化为一维依然可以保持偏导数特征，实际上从一维模型方程出发，分析有限差分方法的精度、稳定性和收敛性等性质，构成 CFD 理论主要内容。同时，经常把基于一维模型的研究成果，如差分格式，直接推广到三维应用问题。但是，采用一维模型分析有限体积方法难以反映有限体积方法的本质特征。以左边面  $dydz$  上积分为例，如果被积分函数与变量  $z$  无关，取  $z$  方向单位长度以后，关于面积分  $dx dy$  的控制方程可以退化为关于  $dy$  线积分。如果被积分函数与变量  $y$ 、 $z$ ，那么在控制方程没有空间积分运算，在这样的模型上讨论以积分型控制方程为基础的有限体积方法问题显然意义不大。另外，数学上不存在一维高斯公式，本质上也没有一维积分型控制方程。

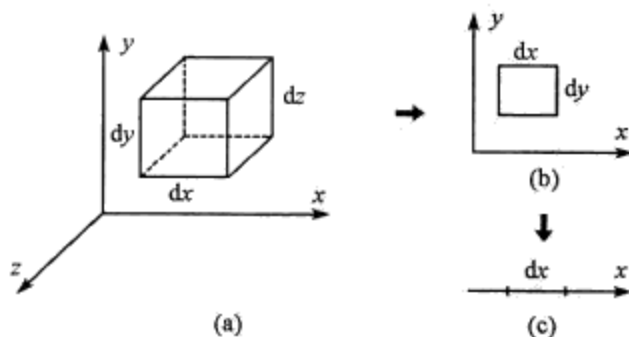


图 3.5 两种方法坐标系比较

第三，在数学离散以后有限差分方法和有限体积方法得到的离散方程形式可能相似或相同，但从精度来分析也有一定差异。从上面计算坐标变换系数的过程不难证明这一结论。例如，采用以上 (3.24) 式或图 3.4 中虚线交点来计算中间包含  $(i, j)$  的实线构成网格单元的体积总存在误差，因此，有限差分方法写成 (3.25) 式与直接建立在实线构成网格单元上的有限体积方法，必然引入误差。

## 第四章 关于几何守恒律的讨论

### § 4.1 网格变形引起的非物理解及所谓几何守恒律

首先, 进行一项数值试验, 如图 4.1 所示意, 长为 4、宽为 1 的封闭矩形区域内充满均匀密度  $\rho = 1$ 、压力  $p = 1/\gamma$  的静止气体 (以气体声速作为速度无量纲参数), 从 Euler 方程出发采用变形动网格技术进行流场模拟。二维问题, 采用三角形网格离散, 那么对任意一个网格单元  $V$  可以写出如下控制方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_V Q d\sigma = - \sum_{k=1}^3 F_c(Q, x_c) \cdot n_k S_k = R(Q) \quad (4.1)$$

在包含运动边界的非定常流场计算中, 为了提高时间精度, 常采用多次内迭代 Runge-Kutta 方法, 迭代次数  $m$  的 Runge-Kutta 方法可表示为:

$$\begin{cases} Q^{(0)} = Q^n \\ Q^{(j)} = \frac{V^n}{V^{n+1}} Q^{(0)} + \sigma_j \frac{\Delta t}{V^{n+1}} R^{(j-1)}(Q) \\ Q^{n+1} = Q^{(m)} \\ \sigma_j = \frac{1}{m-j+1} \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.2)$$

对于各个边等速运动或者静止网格, 即  $x_c = \text{const}$ , 取  $m = 4$  按照以上计算方法计算, 发现在整个流场内求解变量的误差随计算步数增加围绕初始值波动, 其中焓的最大误差  $\Delta h = |h^n - 2.5| < 5.0 \times 10^{-10}$ , 可以看作是计算机的随机误差引起的。

为考察动网格技术对计算结果的影响, 采用左右两条边上网格点静止、上下两条边上网格点运动的方法。上下两条边中点的位移和速度为:

$$\begin{cases} s = \sin \omega t \\ u_x = \omega \cos \omega t \end{cases}$$

在水平方向正弦运动的网格点带动整个流场的网格运动和变形, 图 4.1 显示运动到 1/4 周期的网格分布, 此时上下壁面边界中点达到正的最大位移。

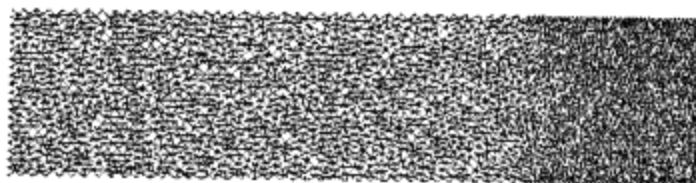


图 4.1 运动网格示意图

静止气体声速作为速度无量纲参数, 振动频率  $\omega$  即网格运动的最大马赫数, 如图 4.2 是取  $\omega = 0.2$  时初始流场中心点 (计算过程中该编码对应的物理空间点是运动的) 处焓值随无量纲时间的变化情况, 可以发现误差呈现增大趋势。考察流场内其他参数也可以发现, 均匀静止特性已被破坏, 出现了明显的非物理解。

在运动最大马赫数  $\omega \in [0.05, 1.6]$  范围内, 考察不同网格运动速度的影响, 发现误差增幅快慢与  $\omega$ 、时间步长等因素有关, 但是这种非物理解现象所有算例都存在。

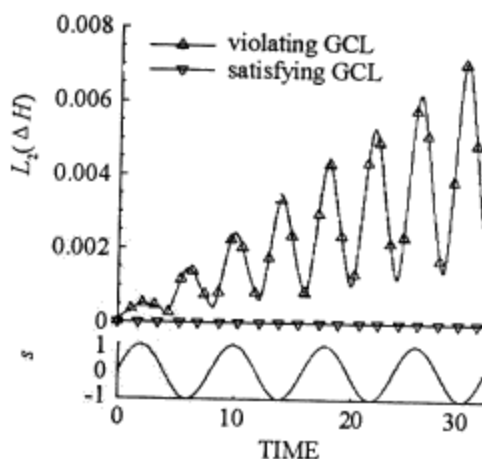


图 4.2 网格位移与流场焓值误差

从原理上说, 网格是否运动不应该影响流场参数, 为何会出现这种现象? 从前国内外应用变形动网格技术进行非定常流动数值模拟的文献中, 都认为是 不满足“几何守恒律”(Geometric Conservation Law — GCL) 导致非物理解。

GCL 概念最早是 Thomas 和 Lombard 于 1978 年在 AIAA 会议上提出<sup>[12]</sup>, 1979 年在 AIAA 期刊正式发表<sup>[13]</sup>, 其后被多位作者推广到与不同计算格式对应的多种形式<sup>[14-15]</sup>。国内作者大多直接应用, 很少进行推广和讨论。

在文献 [12] 中从以下积分形式质量方程出发:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\sigma + \iint_S \rho (\mathbf{U} - \mathbf{U}_s) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (4.3)$$

式中  $\mathbf{U}_s$  是微元面积  $ds$  的运动速度矢量。认为在均匀流场条件下, 网格单元体积变化和网格边界面运动速度之间需要满足如下几何守恒律积分方程:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V d\sigma = \iint_S \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.4)$$

进一步建立微分形式的几何守恒律方程:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \xi_t \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} \eta_t \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{J} \zeta_t \right) = 0 \quad (4.5)$$

在此值得说明的是, 根据前面章节推导 ALE 有限体积方法描述的质量方程时, 介绍了流体力学中随体导数和偏微分对应不同的物理意义, 文献 [12、13] 中质量方程积分形式 (4.4) 是错的, 准确形式应该采用 Euler 坐标系中时间偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V d\sigma = \iint_S \mathbf{x}_c \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{这里 } \mathbf{x}_c = \mathbf{U}_s) \quad (4.6)$$

为解决网格变形引起的非物理解问题, 文献 [12] 作者提出时间推进一步以后单元体积  $V^{n+1}$  不能采用网格的真实几何坐标计算, 而是离散以上 GCL 方程得到。如果采用内迭代  $m$  次的 Runge-Kutta 方法, 中间递推中  $V^{n+1}$  需要如下  $V^{n+1}$  来代替:

$$\begin{cases} V^{(0)} = V^n \\ V^{(j)} = V^{(0)} + \sigma_j \Delta t (\mathbf{n}_j S_j)^{n+\frac{1}{2}} \\ V^{n+1} = V^{(m)} \\ \sigma_j = \frac{1}{m-j+1} \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.7)$$

且在右端项  $R^n(Q)$  计算中涉及的网格面积也要采用如下公式计算:

$$(\mathbf{n}_k S_k)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{n}_k S_k)^n + (\mathbf{n}_k S_k)^{n+1}] \quad (4.8)$$

文献 [12] 采用以上方法可以很好抑制变形网格引起的非物理解, 结果比

较见图 4.2, 可以达到静止网格的误差水平, 最主要的特征是误差随着计算步数不增加。

在后来的应用中, 许多研究者发现, GCL 方程的离散格式与流场控制方程的离散格式关联, 有限体积法采用的时间和空间离散格式不同, 需要建立相应的 GCL 计算方法, 看到的文献中除以上显式多次内迭代 GCL 算法, 还提出显式单步 GCL 算法、隐式 GCL 算法等。

## § 4.2 几何守恒律的本质<sup>[16]</sup>

尽管应用 GCL 解决了变形网格出现非物理解的问题, 但是, 把它作为 CFD 必须遵循的“规律”存在如下疑问:

(1) 通过对最早提出这一概念的推导过程可以看出, 无论积分形式 (4.4) 还是微分形式 (4.5) 的 GCL, 都是通过速度均匀流场参数代入 ALE 坐标下质量守恒方程得到的退化方程, 从理论上不存在独立于流体力学控制方程的、必须要满足的、新的约束条件——几何守恒律。

(2) 现有 CFD 理论中, 显式格式的右端项  $R^n(Q)$  中仅仅包含  $n$  时刻参数, 但是从以上  $m$  次内迭代的 Runge-Kutta 方法计算  $R^n(Q)$  来看, 流场变量是  $n$  时刻的, 几何参数却涉及  $n+1$  时刻的, 导致物理含义模糊。

(3) 采用 GCL 计算得到的体积  $V^{n+1}$  与直接根据几何坐标计算体积  $V^{n+1}$  相比, 不可能更准确, 且理论上无法保证自动消除积累误差。

(4) 微分形式 (4.5) 式是坐标变换函数自动满足的变换关系式 (2.12.1), 实际上从上一章推导过程可以看出, 除此式之外, 还有 (2.12.2) 至 (2.12.4) 式, 这三个关系式并没有被作为刚性动网格或静止网格的 GCL 来处理。

以上这些问题导致文献 [16] 的探讨, 从而揭示 GCL 的内在机理。

为便于理论分析, 采用下图 4.3 所示意的二维矩形网格单元  $ABCD$ , 在  $n$  时刻微元体积为  $V^n = x_{AB} \cdot y_{DA}$  (假设  $z$  方向为单位厚度, 这样继续采用微元体积和面积描述)。从  $n$  时刻到  $n+1$  时刻过程中, 假设  $AB$  和  $DA$  保持静止,  $BC$  和  $CD$  分别以  $\dot{x}_a = (a, 0)$  和  $\dot{x}_b = (0, b)$  的均匀速度运动。如果还是以上静止流场, 那么不管网格如何运动, 参数应该保持不变, 对于密度有  $\rho^{n+1} = \rho^n = \rho = 1$ 。

下面采用时间和空间一阶显式格式离散 ALE 有限体积方法描述的质量方

程, 得到  $n+1$  时刻密度:

$$V^{n+1} \rho^{n+1} = V^n \rho^n + \Delta t R^n(Q) \quad (4.9)$$

在  $\Delta t$  时间内网格运动引起  $BC$  边和  $CD$  边的位移为  $\Delta x = a\Delta t$  和  $\Delta y = b\Delta t$ , 根据几何坐标计算  $n+1$  时刻矩形网格单元  $ABC'D'$  体积为:

$$\begin{aligned} V^{n+1} &= (x_{AB} + \Delta x) \cdot (y_{DA} + \Delta y) \\ &= V^n + (a \cdot y_{DA} + b \cdot x_{AB}) \Delta t + ab(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

由于流场参数是常数, 空间重构格式没有影响, 计算  $n$  时刻值积分方程的右端项:

$$R^n(Q) = \rho^n (x_{AB} \cdot b + y_{DA} \cdot a) = \rho^n (a \cdot y_{DA} + b \cdot x_{AB}) \quad (4.11)$$

把 (4.10) 式和 (4.11) 式代入到 (4.9), 得到:

$$\rho^{n+1} = \left( 1 - \frac{ab(\Delta t)^2}{V^{n+1}} \right) \rho^n \neq \rho^n \quad (4.12)$$

显然这样计算必然出现非物理解。

既然理论上证明必然出现非物理解, 那么也很容易分析出其原因。

计算在离散空间上进行, 根据 (4.11) 式所代表的物理意义, 采用  $n$  时刻物理量计算  $R^n(Q)$  时在  $\Delta t$  时间内冻结了相关参数, 因此网格变形产生体积增量是如图 4.3 所的阴影部分①和②, 得到的  $n+1$  时刻微元体积是不包括  $C'$  点的多边形, 与  $n+1$  时刻微元体积计算式 (4.33) 式相比, 多出了阴影部分③, 这就是导致非物理解的原因。

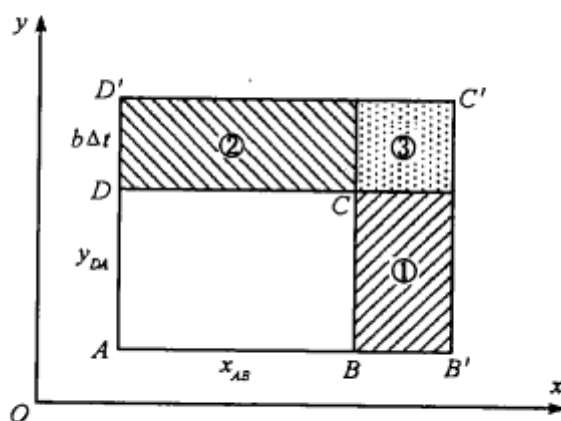


图 4.3 有限体积网格单元

根据 GCL 提出的面积计算方法, 采用  $n+1$  时刻几何参数和  $n$  时刻几何参数的平均值来计算右端项:

$$\begin{aligned}
 R^n(Q) &= \rho^n [0.5(x_{AB} + x_{AB'}) \cdot b + 0.5(y_{DA} + y_{DA'}) \cdot a] \\
 &= 0.5\rho^n [(x_{AB} + x_{AB} + \Delta x) \cdot b + (y_{DA} + y_{DA} + \Delta y) \cdot a] \\
 &= \rho^n [(a \cdot y_{DA} + b \cdot x_{AB}) + ab \cdot \Delta t]
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

正好可以弥补阴影部分③的面积, 代入 (4.9) 式有:  $\rho^{n+1} = \rho^n$ 。

显然引起非物理解的原因与 GCL 方程无关。

对产生非物理解的机理认识清楚以后, 可以提出其他修正算法。对于以上显式格式, 采用如下实际增加体积方法来计算 (4.9) 式左端项中体积:

$$V' = V^n + (a \cdot y_{DA} + b \cdot x_{AB}) \Delta t \quad (4.14)$$

同样不会出现非物理解, 且物理意义更为清晰。图 4.4 是以上 (4.14) 式和 (4.8) 式两种计算方法得到结果比较, 误差均在计算机精度范围内。

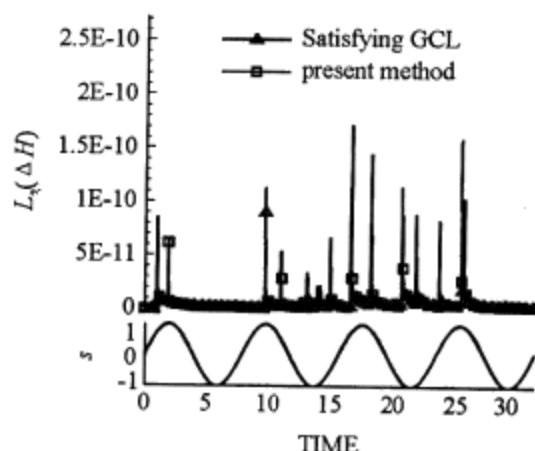


图 4.4 两种计算方法的流场焓值误差比较

新方法计算下一时刻的体积  $V^{n+1}$  时直接采用  $n+1$  时刻几何坐标值, 与 GCL 计算公式相比, 理论上可以保证不存在误差积累。

通过以上关于 GCL 问题的讨论, 可以得出如下结论:

- (1) 应用 ALE 有限体积方法计算变形动网格问题时, 引起非物理解的本质机理是数值方法没有遵守物理规律所致, 不存在必须满足的“几何守恒律”。
- (2) 目前国内外根据所谓“几何守恒律”建立的相关计算方法不过是一种避免非物理解的修正方法, 不是唯一方法。
- (3) 根据 ALE 有限体积控制方程所表达的物理意义, 只有网格边界扫过的体积增量才对物理量时间变化率有贡献, 按照这一准则建立修正方法就不会出现网格变形引起的非物理解。

最后值得说明的是：在 2003 年一次博士生答辩会上，关于“采用整体运动的结构网格开展飞行器动态特性研究时是否需要考虑 GCL 问题”的讨论中，张涵信院士明确指出，“GCL 的微分形式 (4.5) 式不是 CFD 必须满足的必要条件，但是可用来检验计算过程”，本书关于 GCL 的研究也由此受到启发。

有限差分法中应用变形网格时，如果采用数值计算坐标变换系数，也有类似的问题，原理同上。本书不涉及有限差分法，因此不在这里讨论。

## 第五章 非结构网格生成及变形方法

目前, 结构网格、非结构笛卡儿网格、三角形/四面体非结构网格共同构成计算流体力学中的三大网格体系, 至于混合网格 (Hybrid Grid)、龙形网格 (Dragon Grid) 等只不过是这三种基本网格按照一定方式的结合应用<sup>[6,7]</sup>。非结构网格具有几何上的灵活性, 易于处理复杂外形; 网格生成自动化程度较高, 一旦确定边界, 则在计算域内可自动生成网格, 无需人为干预。由于这些优点, 非结构网格十分适合于计算区域内外形复杂、可能有拓扑变化的多体分离问题绕流场。

对于有多体相对运动的复杂流动问题, 可在非结构网格中引入网格变形 (Deforming) 模型, 当流场边界运动时, 动边界带动计算域内部的网格点运动, 这样依靠网格边的伸缩、扭转来适应边界的运动。这种网格变形方法适用于网格变形不太大的情况。当处理位移较大的边界运动如机弹分离问题时, 需要将网格变形与局部重构 (Local Remeshing) 方法相结合, 当网格变形到一定程度, 出现严重扭曲的网格单元时, 重新生成变形区内的网格, 然后将旧网格上的流动信息映射到新网格。

下面分别介绍非结构网格的生成方法、网格变形模型, 以及网格变形与局部重构相结合的算法, 并给出了简单的例子。

### § 5.1 非结构网格生成方法简介

原则上非结构网格单元体可以任意形状, 国外文献中见到过四面体 (tetrahedral)、多棱体 (prismatic)、锥台体 (pyramidal)、六面体 (hexahedral) 及其优化组合的应用, 但是最常见的还是四面体 (二维情况下为三角形)。网格生成一般包括建立坐标系、外形离散 (边界点)、内部布点、连线等基本步骤, 在具体处理时由于描述内部点之间关联性采用的准则不同出现各种算法。三角

形/四面体非结构网格自动生成方法已发展得较为成熟,主要有 Delaunay 方法、阵面推进方法 (Advancing Front Method)、修正的四叉树/八叉树方法 (Modified-Quadtree/Octree Method)。

下面分别对这三种非结构网格生成方法的原理进行简单介绍。

### § 5.1.1 Delaunay 方法

Delaunay 三角化方法的依据是 Dirichlet 在 1850 年提出的一种利用已知点集将平面划分成凸多边形的理论。其基本思想是,给定平面上的点集  $\{A_i\}$ ,则平面上存在一系列互不重叠的凸多边形即 Voronoi 区域  $\{V_i\}$ ,任意一个 Voronoi 区域  $V_i$  包含一个给定点  $A_i$  并且  $V_i$  内的任意一点与  $A_i$  的距离都比与  $\{A_i\}$  中其他点的距离小。这些凸多边形的每一条边都对应着点集  $\{A_i\}$  中的两个点 (一个点偶),将所有的点偶连线就得到了平面的唯一三角化,即生成了三角形网格。

Delaunay 方法生成网格的步骤可以描述如下 (以二维为例,三维情况与之类同):

(1) 离散物理边界面生成初始网格。很多情况下初始网格就是物体表面边界离散点和远场边界离散点连线构成的 Delaunay 三角形网格。

(2) 建立表征网格特性和空间关联性的链表。有限体积法模拟流场主要计算是边界上的流体通量,链表主要包括网格编码、构成单元边界线的两点坐标、内点单元边界线两侧单元编码、单元边界特性 (如物理边界、对称边界) 等信息。按照网格质量 (判定准则下一节介绍) 将初始网格按照由差到好的顺序排列,如果所有网格满足所设定质量参数,网格生成结束。

(3) 大部分情况下初始网格质量很差,简单优化处理无法满足网格质量判据,需要采用设置新点方法来提高网格质量。设置新点的方法有很多种,例如,Boyer 和 Watson 算法是取网格链表首位单元 (即质量最差单元) 的外接圆中心点,如图 5.1 (a) 中  $P$  点所示,查寻所有三角形单元,找出外接圆包含  $P$  点的三角形单元,删除这些三角形靠近  $P$  点一侧的边线,形成如图 5.1 (b) 所示意的凸多边形, $P$  点与空腔节点连接组成新的三角形单元,得到新的网格分布,如图 5.1 (c) 示意,重新建立网格链表和分析网格质量。

(4) 如果质量链表中仍然有不满足所设定质量参数的单元,则重复第 3 步工作,直到所有质量差的单元改善为止。

(5) 删除计算区域外的网格并恢复计算边界面网格。

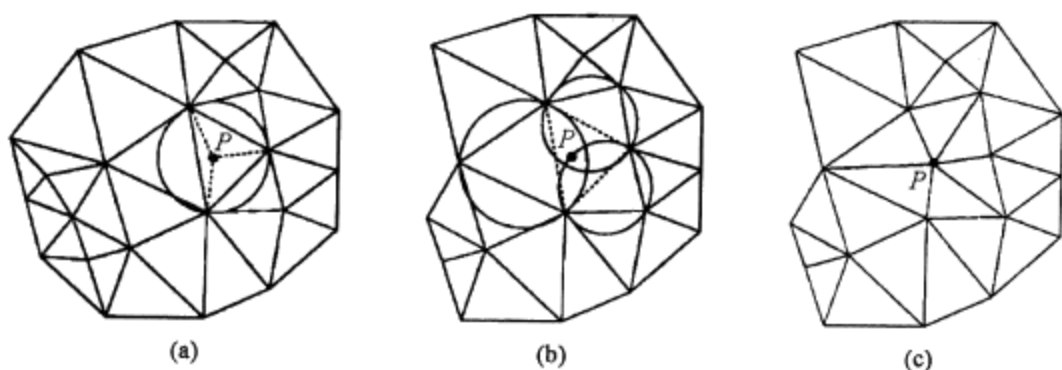


图 5.1 采用 Waston 算法构造新点

Delaunay 方法的优点在于,在给定点集的情况下,生成的三角形单元接近等边三角形,即网格质量较好。另外它的生成效率较高并且有严格的数学理论基础。其缺点是不能提供完美的点集分布,并且不能保证流场边界的完整性。

### § 5.1.2 阵面推进方法

阵面推进方法的基本思想是首先将待离散区域的边界按需要的网格尺度分布划分成小阵元 (Fronts), 阵元集合构成封闭的初始阵面, 如图 5.2 (a) 示意, 然后从某一阵元开始, 在其面向流场的一侧按照正三角形要求插入新点, 判断该点为中心、正三角形边长为直径的圆内是否有阵面的其他点。如果圆内没有其他点, 该点和阵元构成三角形单元, 同时生成了新的阵元、阵面, 并删除被掩盖了的旧阵元, 如图 5.2 (b) 所示; 否则, 在圆所包括的点中选择一个合适的, 与该阵元连成三角形单元, 并删除该阵元, 如图 5.2 (c) 示意。以此类推, 直到阵面中不存在阵元时推进过程结束, 即生成完毕, 最后得到的网格如图 5.2 (d) 所示意。

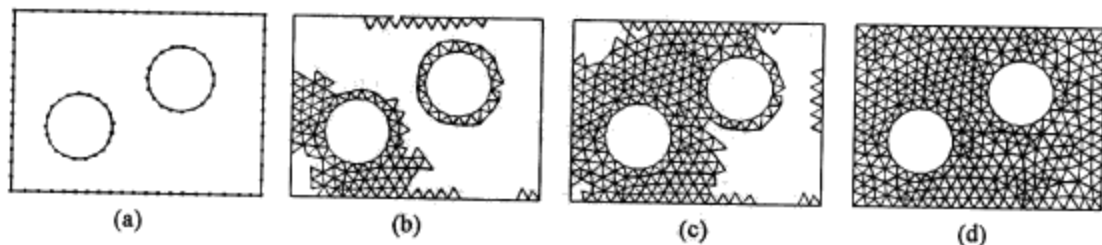


图 5.2 阵面推进法生成三角形网格的过程

阵面推进法的优点是可以提供高质量的点集分布, 并且由于初始阵面即为

流场边界,不存在破坏边界完整的问题,缺点是生成效率较低。近来发展了结合 Delaunay 和阵面推进两种方法的新型网格生成方法,即利用阵面推进法给出点的分布,再用 Delaunay 方法连成三角形单元。

### § 5.1.3 四叉树/八叉树方法

修正的四叉树方法(三维称为八叉树方法)生成非结构网格的思路是在形状规整的矩形网格基础上进行局部修正来描述外形。首先,用树状结构的矩形单元覆盖整个流场,如图 5.3 (a) 示意,其分布的疏密要求可以预先设置。然后,将矩形切割成如图 5.3 (b) 示意的三角形单元,在曲线或曲面构成的流场边界处根据外形和矩形交线形成三角形单元,同时删除物体内部的网格。最后,进行必要的网格光滑,尤其对物面附近切割出的体积很小的单元要进行特殊处理,得到网格如图 5.3 (c) 所示意。

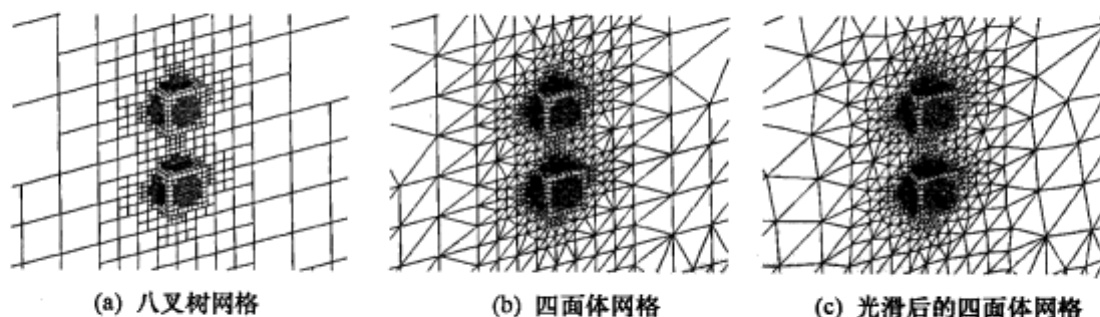


图 5.3 八叉树方法生成四面体网格的过程

四叉树网格生成方法的网格疏密与树状结构的代次变化相对应,特别适合于局部加密的粘性流动计算,主要不足在于物面附近存在质量极差单元,快速查询和有效修正比较繁琐,为解决这一问题,国外文献提出在物面周围预留“空洞”以后生成四叉树单元、用阵面推进法填补“洞”内单元的方法。总的来说,四叉树方法和八叉树方法需要人工干预较多,因此应用相对较少。

## § 5.2 网格变形模型

常用的网格变形方法有弹簧近似(Spring Analogy)方法和弹性体方法(Elasticity Method)。弹簧近似方法是將网格单元的各条边看作弹簧,弹簧系数

与边的长度有关。当边界运动后,通过求解弹簧系统节点受力平衡确定网格点的新位置。弹性体方法是将计算区域比作一个线性弹性体,通过求解弹性力学方程组来确定边界点运动以后引起的内部网格点的位移。弹簧近似方法由于没有考虑剪切应力的作用,变形能力不如弹性体方法;而弹性体方法具有较强的变形能力,但其计算工作量大,计算效率不及弹簧近似方法,另外,增减网格以后需要的处理比较复杂。

根据计算弹簧张力的出发点不同,弹簧近似方法又分两种不同的模型,一种是顶点弹簧(Vertex springs)模型,认为弹簧的平衡长度为零,因此,初始网格每条边的内力不为零,网格节点处存在合力,网格移动后,通过调整各边长,网格点所受合力等于其初始合力。另一种是棱边弹簧(Segment springs),弹簧的平衡长度等于初始边长,因而网格点在初始时刻受的合力为零,当网格点运动后,求解平衡方程得到点的位移。可以证明这两种弹簧模型是等价的,本文采用顶点弹簧模型,并在弹簧模型中引入了边界修正和扭转修正,在一定程度上解决了原来方法易于发生绞扭导致网格体积出负的缺陷,在保持原有的高效率的同时变形能力大为提高。

### § 5.2.1 顶点弹簧模型

动网格的弹簧变形模型如图 5.4 所示,将网格边看做弹簧,节点  $i$ 、 $j$  间的弹簧张力为

$$f_{ij} = K_{ij} (x_j - x_i) \quad (5.1)$$

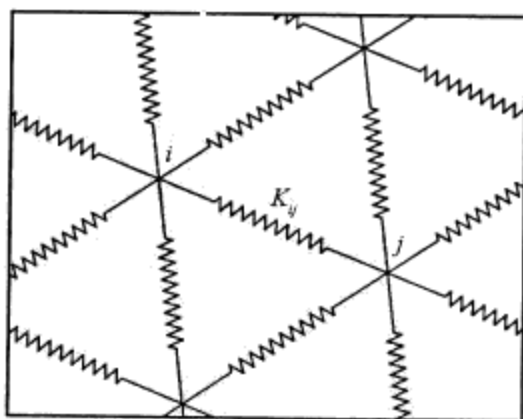


图 5.4 弹簧系统示意图

其中  $K_{ij}$  为节点  $i$ 、 $j$  之间弹簧的倔强系数,  $x_i$ 、 $x_j$  分别是节点  $i$ 、 $j$  的位置矢量。节点  $i$  所受的合力可表示为:

$$f_i = \sum_{j=1}^{N_i} f_{ij} \quad (5.2)$$

这里  $N_i$  是与节点  $i$  相连的弹簧总数 (也就是相邻节点)。初始网格确定以后, 根据上式得到节点  $i$  的初始受力, 则当运动边界上的点移动后, 由于网格各点上的合力保持不变, 可以按照如下线性方程得到其他网格点的新位置坐标:

$$\begin{bmatrix} -\sum_j K_{1j} & & & \\ & -\sum_j K_{2j} & a_{ik} & \\ & a_{ik} & \ddots & \\ & & & -\sum_j K_{n_{\text{psum}},j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_{\text{psum}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n_{\text{psum}}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

其中:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{若 } k \text{ 点不与 } i \text{ 点相连} \\ K_{ik}, & \text{若 } k \text{ 点与 } i \text{ 点相连} \end{cases}$$

由于对角线元素求和指标  $j$  取遍该行所有非对角线不为 0 的列  $k$ , 因此该线性方程对角占优, 采用 Jacobi 迭代或 Seidel 迭代格式均收敛。例如, Jacobi 迭代格式为:

$$x_i^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} K_{ij} x_j^k - f_i}{\sum_{j=1}^{N_i} K_{ij}} \quad (5.4)$$

上式一般经过 3 至 4 次迭代即可达到满意的精度。

与流场耦合求解时, 由于三角形平面运动可以通过定点描述 (多边形曲面运动需要定义), 相对流通矢量的计算中用到的网格边界面的速度  $\dot{x}_f$  可由下式求出:

$$\dot{x}_f = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{p,i} \quad (5.5)$$

下标  $f$  表示四面体网格的表面, 下标  $i$  表示构成该表面的 3 个顶点。每个顶点的速度由下式计算:

$$\dot{x}_{p,i} = \frac{x_{p,i}^{n+1} - x_{p,i}^n}{\Delta t} \quad (5.6)$$

### § 5.2.2 弹簧倔强系数的确定<sup>[1]</sup>

在网格优化中,为使局部网格接近正四面体,常把弹簧倔强系数取为常数,网格点移动后的新位置坐标相当于周围点的坐标平均。但是,用弹簧近似方法实现网格变形运动,为了提高网格变形能力和局部调整变形程度,弹簧倔强系数常设为可变化的,如何确定倔强系数成为应用弹簧近似方法的关键技术。

最简单的是弹簧倔强系数与节点之间的距离成倒数关系:

$$K_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} \quad (5.7)$$

其中  $l_{ij}$  是节点  $i$ 、 $j$  之间的距离。从力学角度可以定性知道当弹簧不断压缩  $l_{ij} \rightarrow 0$  时,倔强系数不断增大  $K_{ij} \rightarrow \infty$ ,可避免网格点的相互碰撞。

大量数值试验表明,二维或三维网格,如下关系更能保持网格的疏密特征:

$$K_{ij} = \frac{1}{l_{ij}^2} \quad (5.8)$$

以上是早期确定弹簧倔强系数方法,由于考虑了弹簧伸缩作用,可以避免网格点直线方向的互相碰撞,但是弹簧近似方法没有考虑剪切应力的约束,并不能保证变形过程顺利进行。应用中发现,当边界运动剧烈,网格单元被严重扭曲,出现如图 5.5 所示的网格边互相交叉的所谓“折穿 (snap-through)”现象,即在  $ab$  边上侧的  $c$  点被移动到下侧,种种情况下单元面积(体积)为负,导致流体计算过程出现非物理。

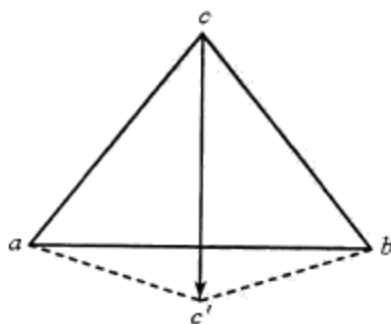


图 5.5 二维折穿 (snap-through) 示意图

内部网格上的变形是受到边界点牵引,根据力学原理这种牵引作用离边界

越远影响越小, 计算实践也表明, 扭曲最严重或最早出现变形失败的单元一般位于运动边界附近。为了提高边界附近网格抗变形能力, 只有增大其弹簧倔强系数, 促使边界运动向网格内部传播, 这种称为弹簧近似方法的边界修正技术, 通过引入边界加强因子  $\varphi$  实现。 $\varphi$  是空间位置的函数, 简单外形可以人为给定, 但是对于复杂外形常通过求解椭圆型方程计算得到, 其原理是把将要运动的边界设为高温条件, 不运动的边界或远场设为低温条件, 在初始网格基础上计算温度场, 作为  $\varphi$  的取值。

因为弹性体方法同时考虑了网格边的伸缩和扭转作用, 使网格具有较强的变形能力。借鉴其思想, 在弹簧近似方法中引入扭转修正因子, 使网格边的扭转也受到约束, 同样可以提高网格的质量和变形能力, 这就是扭转效应修正技术。图 5.6 是二维时扭转效应因子  $\beta$  的取值示意图, 采用该边相对的最小三角形内角。

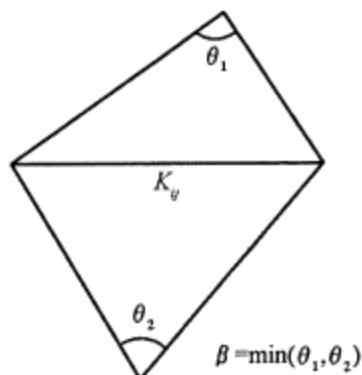


图 5.6 扭转效应因子

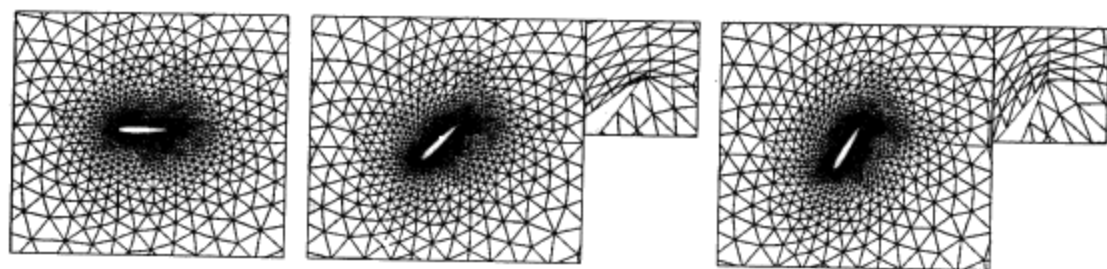
同时考虑上述两种影响因素, 修正的弹簧倔强系数计算公式为:

$$K_{ij} = \frac{\varphi_{ij}}{\beta_{ij}} (l_{ij})^\Psi \quad (5.9)$$

值得注意的是, 节点之间距离和网格边夹角随时间变化, 因此  $l_{ij}$  和  $\beta_{ij}$  值也在变化, 为了实时进行修正, 需要刷新倔强系数。但是, 倔强系数依赖于网格点的空间位置, 弹簧系统的平衡方程 (5.3) 式不再是线性的, 非线性效应可能使系统发散, 所以, 计算过程中不是每个时间步都计算 (5.9) 式, 其刷新频度常根据具体问题通过数值试验来给定。

采用边界及扭转修正方法 (下面称为改进方法) 与原来的标准弹簧近似方法 (即 (5.8) 式, 下面称为标准方法) 计算绕 1/4 弦点偏转的 NACA0012 翼型网格。图 5.7 (a) 是初始网格, 具有 1597 个网格点, 3091 个单元。图 5.7 (b)

是应用标准方法偏转  $45^\circ$  得到的网格，可以明显看出，翼型后缘出现网格交叉，变形过程失败，这种情况下改进方法依然有效，事实上如图 5.7 (c) 可见，翼型偏转到  $60^\circ$  时网格质量仍然较好。对比文献中所给出的弹性体方法的结果可知，经过边界修正和扭转效应修正后的弹簧近似方法所能实现的网格变形能力，已经达到了弹性体方法的水平，但是，改进方法的计算效率与标准方法基本相同。



左：原始网格；中：标准方法，偏转  $45^\circ$  的结果；  
右：修正的弹簧近似模型，偏转  $60^\circ$  的结果；右上角是后缘放大图。

图 5.7 标准方法与修正的弹簧模型的比较

### § 5.2.3 六面体（结构）网格的变形

前面所述的网格变形方法将网格单元的棱看作弹簧，整个网格构成一个弹簧系统，边界运动时引起弹簧系统的变形。这种弹簧近似方法在非结构三角形/四面体网格中取得了广泛的应用，但如果直接应用于六面体网格，有可能会因变形能力不足而使六面体严重扭曲，网格质量变差。主要原因是六面体网格连线较少，采用弹簧近似模型时，弹簧数目较少，易于发生扭绞，对抗形变的能力不如四面体。

为了提高六面体网格的变形能力，将六面体的面对角线和体对角线也看作弹簧，如图 5.8 所示，其中细的虚线为面对角线，有 12 条，点划线为体对角线，共有 4 条。六面体网格中，一个顶点出发的网格线共有 6 条，整个网格中网格线与网格点的个数之比为 3:1；化为内部包含的 6 个四面体以后，网格线数目大幅增加，网格线和网格点数目之比为 7:1。按照图 5.8 那样增加了对角线以后，网格线与网格点数目之比变为  $12/4 + 12/2 + 4 = 13$ ，比六面体剖分为 6 个四面体还高，抗形变能力比四面体要强。

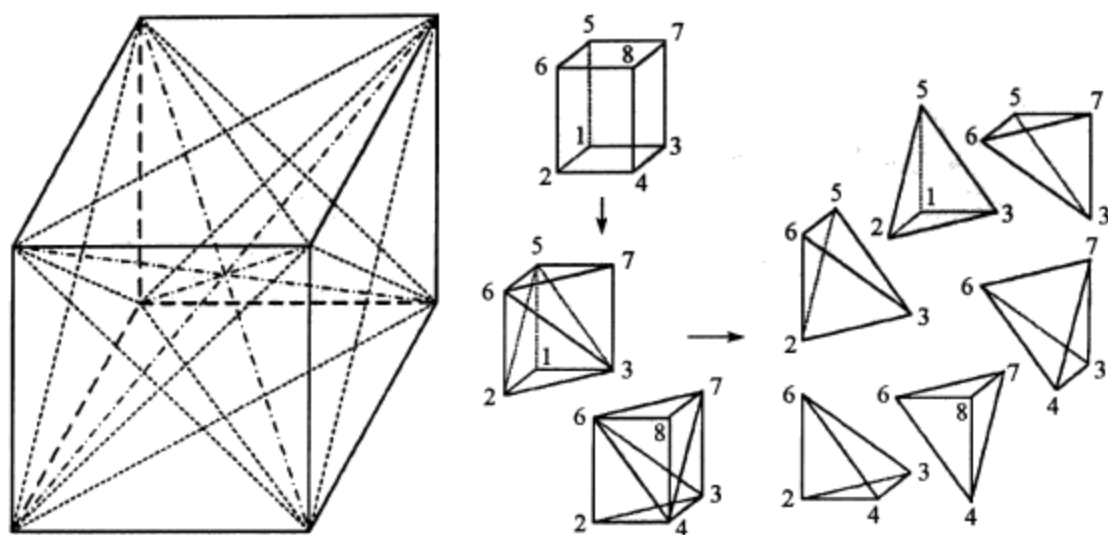


图 5.8 六面体中的弹簧及内部四面体

### § 5.3 变形与重构相结合的动网格方法<sup>[1,2]</sup>

对大位移多体分离问题, 仅仅采用网格变形是无法适应边界运动的, 这种情况在网格较密情况下更严重。以二维机翼/外挂物分离绕流为例, 图 5.9 (a) 给出了初始网格, 机翼与外挂物之间的网格质量较好。随着外挂物相对机翼的运动, 二者之间的网格会被逐渐拉伸, 导致网格质量变差, 如图 5.9 (b) 示意, 这时不但影响计算精度, 而且部分网格体积压缩导致时间推进步长较小, 降低了计算效率, 更为严重的是易于出现网格“折穿”现象, 导致非物理解。解决这一问题的办法是在局部网格质量变差的时候, 将这些网格删掉, 重新生成局部的网格, 并将旧网格的流动变量映射到新网格上, 继续进行计算。这也就是本节介绍的网格变形与局部重构 (Local Remeshing) 相结合的方法。

实际应用时, 首先在运动边界周围提取一个封闭窗口, 位于窗口边界上或窗口以外的网格点固定不动, 而窗口内部的网格可以变形以适应动边界的运动。窗口内部即构成变形区, 网格变形方法采用改进的弹簧近似方法。当变形区内的网格单元严重扭曲时, 重新生成变形区内的网格, 流动信息从旧网格传递到新网格, 然后放弃旧网格, 在新网格基础上继续计算。随着动边界位移的增大, 窗口范围需要适时更新, 从而使动边界始终处于窗口中合理的位置。

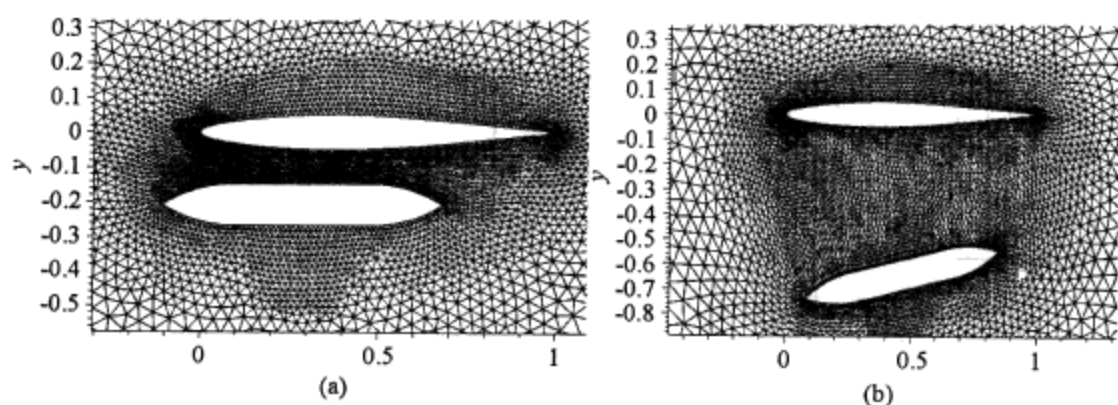


图 5.9 二维机翼/外挂物分离问题

采用动网格窗口的方法可以减小网格变形和重构的范围，提高计算效率。尽管弹簧近似方法的线性方程组 (5.3) 式中大部分元素是 0，但是，非结构网格的无序性很难整理成对角块矩阵形式，因此，求解计算量随着结点数大致成平方关系增加。其次，窗口内重构网格时删除和添加网格点后需要重新定位和编码，网格数目也直接影响计算量。采用分区方法减少计算区域中动网格可以节省计算资源，提高计算效率。

### § 5.3.1 网格变形与网格重构相结合的应用步骤

如图 5.10 示意，网格变形与网格重构相结合的方法解决分离问题的一般步骤是：

- (1) 选择要进行变形和重构的区域（所谓窗口），进行网格分类和重新编码；
- (2) 计算整个区域流场；
- (3) 进行刚体动力学方程求解，确定分离体下个时刻位置和姿态；
- (4) 利用弹簧近似方法对窗口内网格变形，适应边界运动；
- (5) 进行网格质量判定，如果不满足网格质量参数，则保留物面和窗口边界点，删除内点，进行区域重构；
- (6) 根据新旧网格的几何关系，获得新网格单元的物理量；
- (7) 根据运动物体新位置，重新确定窗口边界；回到步骤 1)。

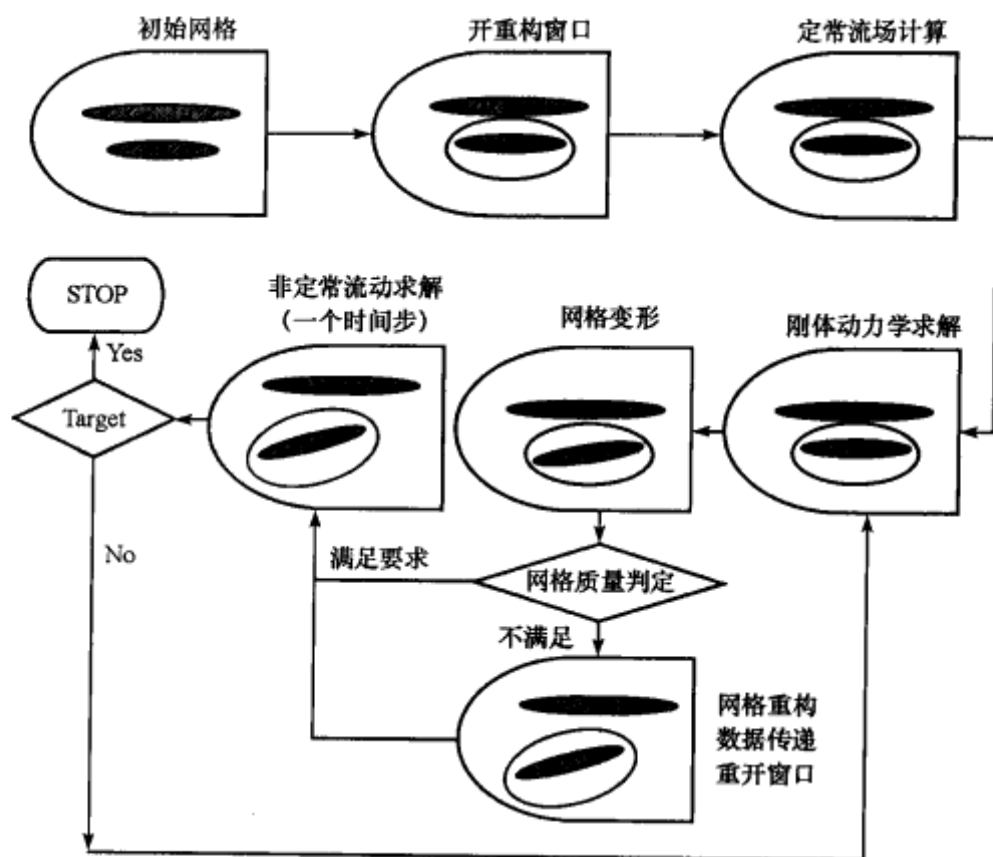


图 5.10 网格变形与局部重构相结合的动网格方法

图 5.11 是前面介绍的二维机翼/外挂物分离绕流计算中网格重构示意图。

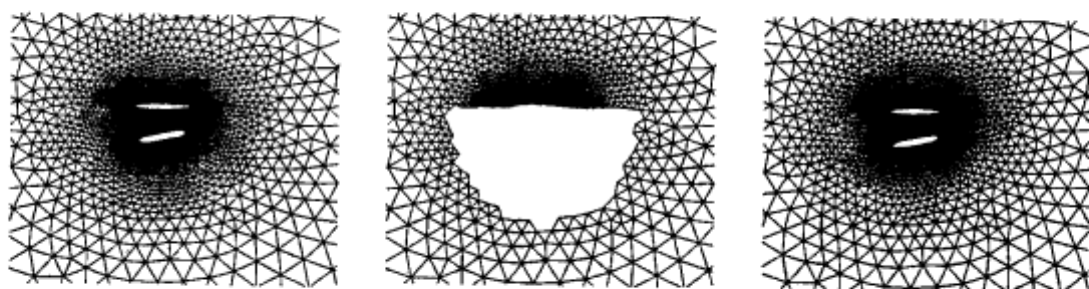


图 5.11 动网格局部重构

### § 5.3.2 窗口边界的确定

窗口边界不仅是区分动点与不动点的分界线，而且也是重新生成变形区网格时的网格边界。对于动边界位移较大的情况，窗口范围一般要经过多次更新。因此，窗口边界必须由现有网格单元的边（三维时为网格单元面）逐个连接构成，并且能够在计算过程中自动、高效地提取并记录。至于确定窗口边界的依据，可以是人为给定，一般是包围运动物体的规则几何形状，如圆、椭圆、矩形等，也可以直接采用运动物面边界周围的若干层网格。前者可采用最佳邻点搜索法快速提取窗口边界，后者则采用分层标号法提取窗口边界。

下面具体给出这两种方法的原理和算法。

#### (1) 最佳邻点搜索法

最佳邻点搜索法的基本思想是：找到一个最接近给定的几何图形轮廓线的点，以该点为起点沿正方向寻找最接近几何轮廓线的邻点。确定窗口边界就是在现有的网格中找出最接近该几何形状的网格边的组合，并按照重构网格初始阵面的正方向定义每一条边的起点和终点。算法归纳如下：

- A. 建立链表记录每一个网格点的邻点；
- B. 找到起始点  $P_0$ ，令  $START\_POINT = P_0$ ；
- C. 在  $START\_POINT$  正方向查找最接近几何轮廓线的邻点  $P$ ；
- D. IF:  $P = P_0$  THEN  
STOP  
ELSE  
    令  $START\_POINT = P$ ，返回 C.  
ENDIF

图 5.12 是该算法的示意图，虚线为给定的几何图形轮廓，从 1 到 5 点为搜索到的窗口边界点，这些点位置计算中保持不变，右侧的邻点会发生移动，重构时就去掉窗口边界点右侧严重变形的网格单元，在以窗口边界点为基础生成新网格单元。

#### (2) 分层标号法

当运动边界与其他边界距离较远时，可以指定其周围若干层网格单元为窗口范围。这需要对运动边界周围的网格点和单元按层进行标记，根据标号可方便地区分窗口内外的网格点及单元并确定窗口边界。下面给出标记方法：

- (a) 将位于动边界上的点记为第 1 层点；

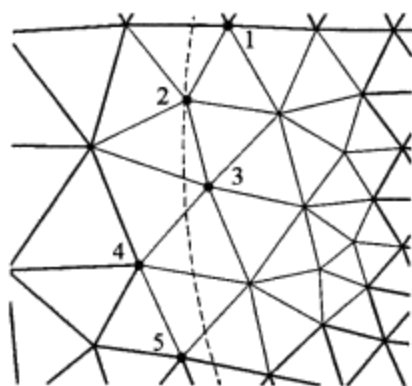


图 5.12 最佳邻点搜索示意图

(b) 一个单元被记为第  $n$  层单元当且仅当该单元的三个顶点中至少有一个是第  $n$  层点；

(c) 一个点被记为第  $n$  ( $n > 1$ ) 层点当且仅当该点是第  $n-1$  层单元的顶点但不是第  $n-1$  层点。

如果根据网格尺度, 确定包括  $l$  层网格单元, 则第  $l+1$  层网格点就是窗口边界点。图 5.13 表示 2 层网格单元的标记。

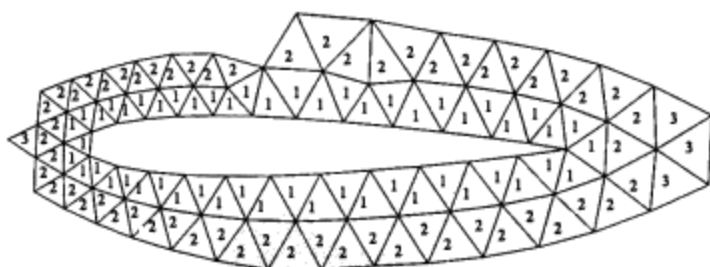


图 5.13 网格单元的分层标记

### § 5.3.3 网格质量判据

网格质量好坏直接影响计算的精度。在 CFD 网格生成软件中, 一般计算控制体的体积分布、面之间的夹角、边之间的比值等参数, 结合可视化技术进行人工检查, 大多是定性的, 没有严格的网格判据标准。但是应用动网格中实时评估网格质量, 需要确定网格判据, 决定是否需要网格重构。

对于四面体网格, 本文用过两种判据标准。一种是四个面之间的最小夹角:

$$\min(\theta_{ij}) \geq 15^\circ \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

其中  $\theta_{ij}$  表示四面体的第  $i$  和第  $j$  个表面之间的夹角。

另一种是 Miller 等人提出采用  $Q = R/L$  作为质量判据参数, 其中  $R$  表示外接圆半径,  $L$  表示四面体最短边长。图 5.14 中给出质量较差的几种四面体, 可以看出仅依靠这一个参数难以描述, Blazek 还提出了如下几种网格质量判据:

- 判据 1: 四面体外接球半径/单元内切球半径, 最佳值为 3.0;
- 判据 2: 四面体最大边长/内切球半径, 最佳值为 4.899;
- 判据 3: 四面体外接球半径/最大边长, 最佳值为 0.6125;
- 判据 4: 四面体最大边长/最小边长, 最佳值为 1.0;
- 判据 5: (四面体平均长度)<sup>3</sup>/四面体体积, 最佳值为 8.4797;
- 判据 6: (四面体体积)<sup>4</sup>/(四个面面积和)<sup>3</sup>, 最佳值为  $4.585E-4$ 。

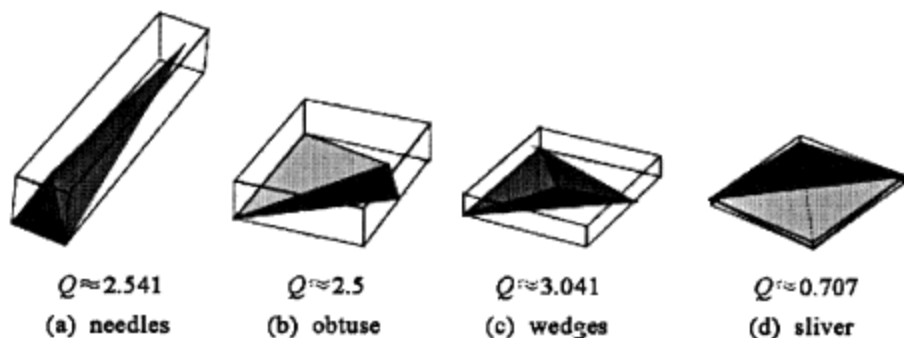


图 5.14 质量差的四类四面体网格

网格变形过程中满足以上所有判据非常困难, 本文选择判据 3 和判据 5 作为网格重构条件。具体操作是把初始网格的判据 3 计算值  $P_3$  和判据 5 计算值  $P_5$  作为参考, 网格移动后重新计算判据 3 和判据 5 的值, 不妨设为  $P'_3$  和值  $P'_5$ , 如果满足下式需要进行网格重构:

$$\begin{cases} P'_3 \geq K_1 \times P_3 \\ P'_5 \leq P_5 / K_2 \end{cases} \quad (5.10)$$

其中  $K_1$ 、 $K_2$  为正常数, 值越大, 允许的网格质量越差; 后面多体分离计算中, 为提高计算效率, 减小重构次数, 经数值试验取  $K_1 = K_2 = 10$ 。

### § 5.3.4 寻点算法

在完成网格重构以后必须传递新旧网格之间的流场信息,才能使计算在新网格基础上继续,为此需要标定新网格点所对应的旧网格区域,这一过程叫做识别贡献单元(Donor Cell),有时又称“寻点”。“寻点”所要解决的问题为:给定物理空间点的坐标 $(x, y, z)$ ,需要从众多的多面体中搜索出一个包含该点的单元。“寻点”算法的关键在于准确和高效率,如果方法不适当,会出现搜索失败或者错误定位,导致后续流场计算发散或非物理解,同样“寻点”算法效率过低也会导致计算量增加。

最简单的“寻点”算法是逐个查找,但是在网格数量较大的情况下,这种算法意味着新网格单元中心点平均要访问半数旧网格单元,无疑十分耗时,因此在实际网格数目较多的问题中很少应用。目前,根据计算几何学研究成果,应用中高效率的“寻点”方法有很多种,包括采用叉树结构,如八叉树、ADT树、基于非结构嵌套网格的“蛇行法”、Neighbor to Neighbor (N2N)方法等。本文采用八叉树(二维时为四叉树)“寻点”方法,主要包括建树、检索和精确定位三个步骤。

八叉树建树的思路是:首先在旧网格区域建立能覆盖整个区域的六面体作为第一代,而后对所有旧网格节点循环,逐个记录到八叉树中。设定每个六面体最多存储八个点,当有第九个点落入某个六面体中时,将该六面体分裂成八个子六面体,原来的八个点根据位置重新记录到相应的六面体中,而后根据坐标将第九个点添加到子六面体中,如果该子六面体已经存在八个点则子六面体继续分裂,直到每个六面体包含的点数不超过八个,这样就建立起一个八叉树结构。

对于编码为IQ的六面体,建立两个数组LOCTA(1:11, IQ)和ROCTA(1:6, IQ)来记录相关信息,具体内容如下:

LQUAD(11, IQ): = 0: 六面体IQ是空的,没有存储点

                  > 0: 六面体IQ中存储的点数

                  = -1: 六面体IQ拥有子六面体

LQUAD(10, IQ): 六面体IQ的父六面体

LQUAD(9, IQ): 六面体IQ在父六面体中所处的位置(在兄弟中的排行)

LQUAD(1:8, IQ): 当LQUAD(11, IQ) > 0时为IQ中存储的点的序号

                  当LQUAD(11, IQ) = -1时为IQ的子六面体序号

RQUAD (1:6, IQ): 标志六面体 IQ 范围的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标范围

八叉树检索过程: 在已经建立的八叉树的数据结构基础上, 给定任意点的坐标值, 从八叉树顶端逐代向下搜索, 一直搜索到包含有该点并且没有子六面体的最低代六面体, 该六面体中存储的旧网格点的相邻单元就是需要访问的贡献单元。

精确定位: 根据网格链表, 得到旧网格结点就可以找到以该点为顶点的所有四面体单元, 采用“体积判别法”判定具体归属。如图 5.15 所示, 如果点  $P$  位于四面体  $ABCD$  内部当且仅当四面体  $ABCP$ 、 $ABDP$ 、 $ACDP$ 、 $BCDP$  的体积均不为负。分别计算四面体  $ABCP$ 、 $ABDP$ 、 $ACDP$ 、 $BCDP$  的体积, 以四面体  $BCDP$  为例进行说明, 体积的计算公式为:

$$V_{BCDP} = \frac{1}{6} (DB \times DC) \cdot DP \quad (5.11)$$

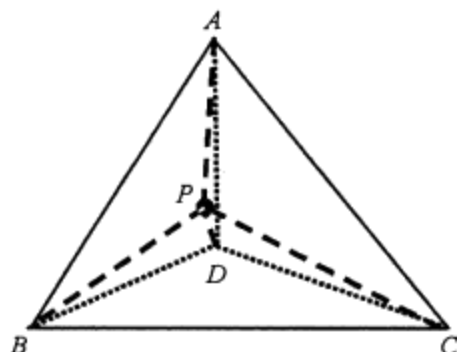


图 5.15 体积判别法

## 第六章 高精度信息传递方法

### § 6.1 空间插值方法传递流场信息存在的难题

同一物理空间区域上不同块网格之间的流场信息传递的重要性在第一章中已经介绍过,下面通过非定常流动和定常流动两个算例来考察目前采用的插值方法引起的耗散和非物理波动问题。

例 6.1 一维 Riemann 问题的初始间断分布为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & 0 \leq x < 0.5 \\ (0.5, 0, 0.571) & 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

计算区域为  $x \in [0, 1]$ , 网格划分采用如下指数形式:

$$x_j = \frac{\exp\left(k \frac{j}{N}\right) - 1}{\exp(k) - 1} \quad j = 0, \dots, N \quad (6.2)$$

保持网格数目不变  $N = 200$ ,  $k$  为网格疏密的控制参数,  $k = 0$  为均匀网格,  $k < 0$  网格左疏右密,  $k > 0$  左密右疏。第一套网格控制参数  $k_1 = -1$ , 第二套网格  $k_2 = 1$ , 得到两套网格如图 6.1 所示, 空间离散采用 NND 格式, 时间离散采用 TVD 型的 Runge-Kutta 方法, 推进步长  $\Delta t$  根据稳定性  $CFL = 0.8$  计算得到。图 6.1 中还给出无量纲时间  $t = 0.15$  时刻两套网格的流场密度分布, 由于第一套网格左疏右密, 因此更为准确地捕捉到靠近右边界的剧烈波动。

采用在两套网格之间交互计算来考察插值方法对于计算结果的影响, 即把  $n$  时刻在第一套网格得到的结果插值到第二套网格计算  $n+1$  时刻, 然后再插值到第一套网格计算  $n+2$  时刻, 以此类推。

插值用了两种方法。第一种是线性插值。网格点  $x_j$  和  $x_{j+1}$  的变量分别为  $U_j$  和  $U_{j+1}$ , 在  $[x_j, x_{j+1}]$  上任一点  $x_p$  处则该点上的守恒变量:

$$U_p = U_j + (x_p - x_j) U'_x \quad (6.3)$$

其中:  $U'_x = \frac{U_{j+1} - U_j}{x_{j+1} - x_j}$  是变量梯度。

第二种插值方法是所谓 ENO 守恒型插值。采用扩展了的节点模板, 通过比较差商的绝对值大小来选取变量梯度, 即:

$$U'_x = \begin{cases} d_1, & |d_1| \leq |d_2| \\ d_2, & |d_1| > |d_2| \end{cases} \quad (6.4)$$

其中:  $d_1 = \frac{U_{j+1} - U_j}{x_{j+1} - x_j}$ ,  $d_2 = \frac{U_j - U_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$ 。

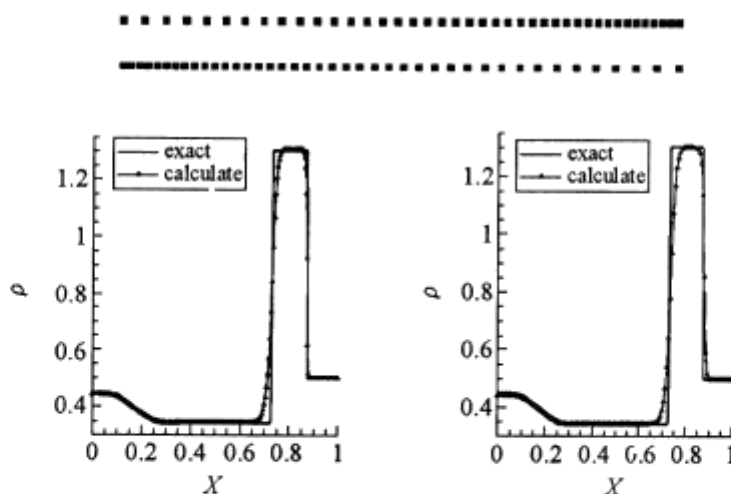


图 6.1 两套网格及其计算结果

按照以上交替插值方法, 在无量纲时间  $t = 0.15$  计算结束时共完成 206 步, 流场密度分布如图 6.2 所示。通过与图 6.1 比较发现, 引入线性插值以

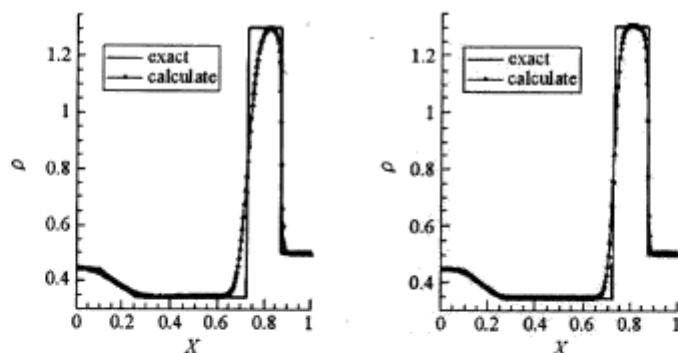


图 6.2 两套网格之间插值结果

后, 尽管差分格式没有变化, 但是频繁插值之后流场参数的精度下降很严重, 令人难以理解的是计算结果在间断处的分辨率比左密右疏的第二套网格还要差; 守恒型 ENO 插值具有一致高阶精度的优点, 没有明显降低间断的分辨率, 但是出现了微小振荡。

还研究了交替插值之间计算间隔次数的影响, 在一套网格上计算 30 步后插值一次, 发现线性插值的耗散变弱, 但是 ENO 插值振荡更明显。

### 例 6.2 二维激波反射问题。

马赫数  $M_\infty = 2.0$  气流中产生斜激波与平板相交反射, 激波与平板的夹角为  $38.66^\circ$ 。以平板前缘到入射激波与平板交点的距离为参考长度, 计算区域的长高分别为 2 和 1。初始条件按照 Rankine-Hugouiot 斜激波公式给定入口边界和上边界物理量, 出口边界则采用外推的方法, 壁面处给定无穿透的滑移边界条件。

计算采用剖分矩形形成的三角网格, 第一套网格的单元数为  $(120 \times 64) \times 2$ , 第二套网格的单元数为  $(60 \times 49) \times 2$ , 壁面附近网格如图 6.3 所示, 图中还给出两套网格上得到的收敛解。

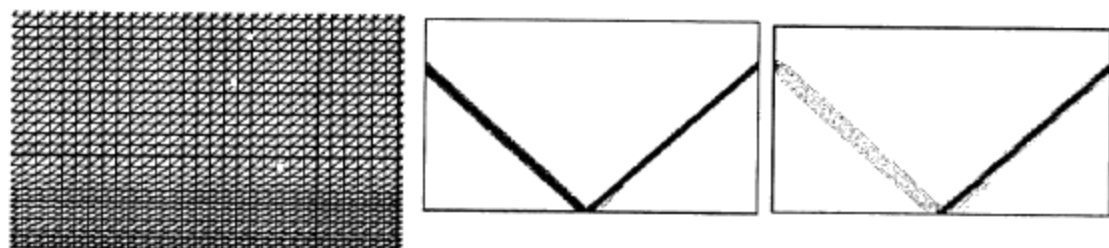


图 6.3 局部网格示意图及其压力等值线 (中: 细网格, 右: 粗网格)

以第一套细网格上收敛解为初场, 采用每隔 2 步在网格之间交替插值一次的方法继续计算, 以考察插值方法的影响。由于计算值出现周期性波动, 难以根据收敛判据停止计算, 统一采用插值 24 次, 即计算 50 步时的结果来分析。

双线性插值假设待插值点  $P(x, y)$  落在由  $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$  和  $C(x_C, y_C)$  组成的三角形  $\triangle ABC$  内, 根据方程计算得到  $P$  点流动参数  $U$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & U - U_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & U_B - U_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & U_C - U_A \end{vmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

应用 ENO 方法时, 假设任一单元内的物理量分布可表示为:

$$U = U_x x + U_y y + U_0 \quad (6.6)$$

对三角形网格来说,通常选取待插值点所在的单元和与其相邻的三个单元来确定未知系数  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_0$ , 四个方程三个未知数,存在优化问题,这里采用使  $|U_x| + |U_y|$  值最小作为选择单元的准则。

线性插值和二阶 ENO 插值的计算结果如图 6.4 所示,可以看出,线性插值带来的耗散很大,激波被严重抹平;ENO 插值对激波的分辨率较好,但在波后出现了跳动,激波位置也出现了畸变,不再是严格的直线。

下面从波动方程  $L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  出发,根据 CFD 理论解释这些现象。

对波动方程进行差分求解,等价于求解其修正方程:

$$L(u) = \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \quad (6.7)$$

可以看出,由于系数  $\gamma_l$  与网格空间距离  $\Delta x$  相关,差分格式计算得到的流场参数与网格分布相关,即使时间步长  $\Delta t$  相同,不同网格在同一位置、同一时刻得到的解也不相同。插值是相同时刻不同空间位置的物理量之间的关联,第二套网格结点  $x_p$  处数值解为  $u_p$ , 根据第一套网格结点变量插值得到该点的值为  $u_T$ , 为分析方便,假设两套均匀网格,插值精度为  $r$  阶,那么,二者之间可以写为如下形式:

$$u_T = u_p + c(x) \Delta x^r \quad (6.8)$$

由于不同位置物理量不同,式中  $c(x)$  是空间位置的函数。

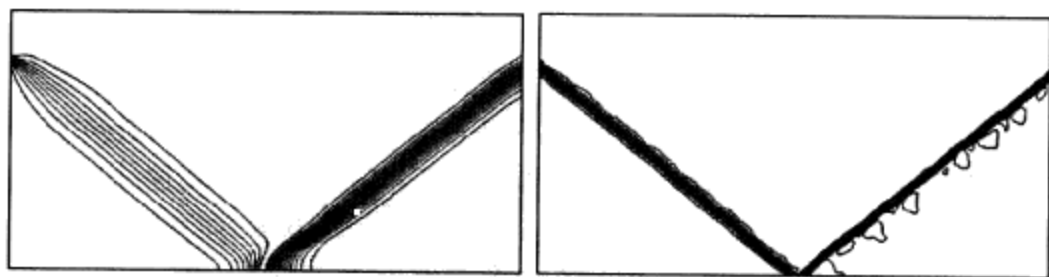


图 6.4 交替插值的压力等值线 (左: 线性插值, 右: ENO 插值)

假设  $u_p$  和  $u_T$  随时间变化导数相等,  $u_p$  满足修正方程:

$$\begin{aligned} L(u_p) &= \frac{\partial u_p}{\partial t} + a \frac{\partial u_p}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u_T}{\partial t} + a \left[ \frac{\partial u_T}{\partial x} - \frac{\partial c(x) \Delta x^r}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \frac{\partial^l u_p}{\partial x^l} \\
 &= \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \left[ \frac{\partial^l u_T}{\partial x^l} - \frac{\partial^l c(x) \Delta x'}{\partial x^l} \right]
 \end{aligned}$$

推导出插值不影响差分方程的条件是：

$$a \frac{\partial c(x) \Delta x'}{\partial x} = \sum_{l=2}^{\infty} \gamma_l \frac{\partial^l c(x) \Delta x'}{\partial x^l} \quad (6.9)$$

空间位置仅是物理量变化规律的自变量， $c(x)$ 形式难以预料，在非均匀网格情况下，如前面(6.2)式所表示的指数网格， $\Delta x$ 也是空间位置的函数，因此不可能保证满足以上等式。

根据 CFD 理论，对数值解影响较大的是修正方程第一项，通过上式可以定性分析插值对差分方程的影响。不考虑  $c(x)$  影响，定性分析时假设  $\frac{\partial \Delta x'}{\partial x} \sim O(\Delta x'^{-1})$ ，如果差分格式要满足一阶精度，为了保证修正方程第一项中系数  $\gamma_2 \sim O(\Delta x)$  不受影响，要求插值误差影响修正方程中  $\gamma_3$  项，推导出  $r-3 > 1$ ；如果差分格式要满足二阶精度，保证不影响修正方程中右端第一项中系数  $\gamma_3 \sim O(\Delta x^2)$ ，要求  $r-4 > 2$ 。这样的精度要求是线性插值和 ENO 插值达不到的，因此，二者之间的差异相当于在原来网格基础上增加了一个新的误差源，可以合理地解释前面数值试验中发现的插值之后的计算结果比第二套右端稀疏网格还要差的现象。

通过以上具体算例和定性分析，得出结论：计算流场过程中的插值运算，会引起差分格式的相容性变化，导致解的精度降低。目前还没有构造出能够适应间断流场的高精度插值方法，采用现有插值方法实现网格之间流场信息传递必然以降低流场计算方法的精度为代价。

## § 6.2 采用动网格传递流场信息<sup>[17]</sup>

受到移动网格技术的启发，提出从原理和应用两方面与插值方法完全不同的流场信息传递方法。

### § 6.2.1 基本原理

下面以二维为例介绍这种信息传递的原理,具体计算公式根据网格空间维数给出。图 6.5(a)中,已知  $n$  时刻代表旧网格的  $O$  点处流场参数,需要得到代表新网格的  $P$  和  $Q$  点处流场参数。如图 6.5(b)所示,在旧网格基础上时间方向推进  $\Delta t$ ,计算得到  $n+1$  时刻流场参数的同时,采用前面介绍的动网格技术,保持  $O$  点及周围所涉及的网格不变形但是同一速度运动,使得  $O$  点平移到  $P$  点;同样,在旧网格基础上,还是从  $n$  时刻流场参数出发,保证时间方向同样推进  $\Delta t$ ,同时采用平移网格使得  $O$  点在  $n+1$  时刻移到  $Q$  点,如图 6.5(c)所示。由于  $P$  和  $Q$  所在空间位置正好是新网格的点,因此通过动网格技术得到  $n+1$  时刻的流场参数,在此基础上放弃旧网格,采用新网格继续计算。

以上流场信息传递原理与插值方法比较,有明显不同:

(1) 插值在同一时间层内利用空间关联完成信息传递,即用  $n$  时刻  $O$  点及其相邻点参数得到  $n$  时刻  $P$  和  $Q$  点处流场参数,然后采用新网格继续计算;本书介绍的方法利用时间相关法求解控制方程过程的时间和空间,在两个时间层完成信息传递。

(2) 上一节已经证明插值必然引入新的误差,本书介绍的方法通过求解流动方程完成流场信息传递,得出的  $n+1$  时刻流场参数在旧网格上与有限体积法离散方程完全相容,在新网格上使用时以此为基础进行通量重构,也不存在不相容的问题,因此,信息传递过程本身不会带来额外误差。

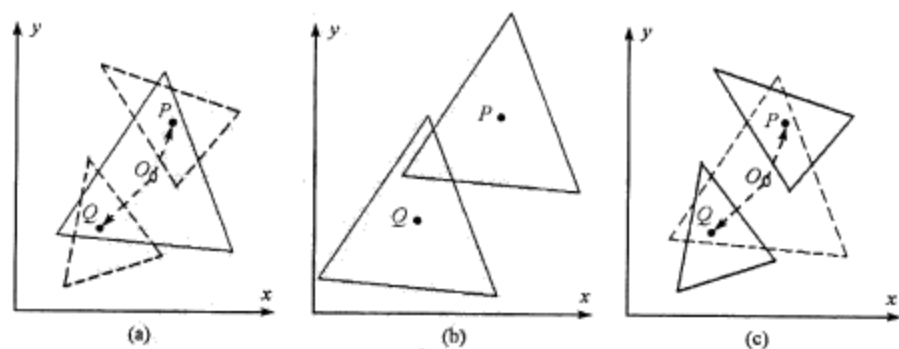


图 6.5 信息传递原理演示

但是,求解流动方程需要满足稳定性条件,采用本书介绍的方法传递信息时,新旧网格空间位置与时间推进步长相互关联,为了保证  $n+1$  时刻的流场

同步性, 整个需要传递信息的区域应当使用根据稳定性条件确定的统一的最小时间步  $\Delta t_{\min}$ , 有些新旧网格之间移动距离较大, 在  $\Delta t_{\min}$  时间内无法实现, 采用多步进行。从前面有限体积方法的高精度格式构造过程知道, 即使求解  $Q$  点处流场, 也需要相邻区域的其他网格信息, 采用时间显式格式计算, 推进一步仅要  $Q$  点相邻网格  $n$  时刻流场, 推进两步则要  $Q$  点相邻网格  $n+1$  时刻流场, 把移动区域扩大了, 计算条件更为苛刻, 计算过程更为复杂, 因此, 本书介绍的方法传递信息需要确定最少的时间推进步数。

### § 6.2.2 一维传递方法稳定性条件

如图 6.6 所示意, 假设需要得到信息的  $x_p$  位于旧网格  $[x_j, x_{j+1}]$  上, 且离  $x_j$  较近, 即  $x_{j+1} - x_p \geq x_p - x_j$ 。

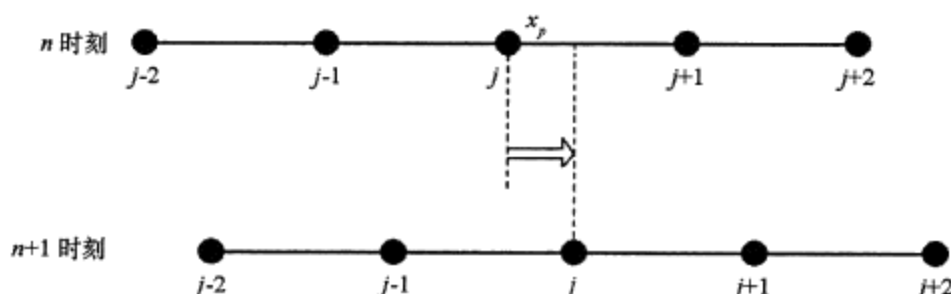


图 6.6 一维移动网格

假设网格能在一个时间步长内由  $x_j$  移动新网格点  $x_p$ , 则网格移动速度为:  $x_t = \frac{x_p - x_j}{\Delta t}$ , 有限体积方法的稳定性条件:  $\Delta t \leq CFL \frac{\Delta x}{|u - x_t| + a}$ , 进一步化为:

$$\Delta t \leq CFL \frac{\Delta x}{|u| + |x_t| + a}$$

其中  $CFL$  为有限体积计算方法的 Courant 数,  $u$  为流体速度,  $a$  为当地声速,  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  是空间步长。方程联立, 消去  $x_t$ , 可以得到:

$$\Delta t \leq \frac{CFL \cdot \Delta x - |x_p - x_j|}{|u| + a} \quad (6.10)$$

上式即为新旧网格之间信息传递过程时间步长应当满足的关系。

由于  $|x_p - x_j| \leq 0.5\Delta x$ , 因此到当  $CFL > 0.5$  时上式右端恒为正, 这说明时间推进步长  $\Delta t$  按照稳定性条件取值, 网格移动总能在一个时间步长内完

成。

### § 6.2.3 二维传递方法稳定性条件

如图 6.7 所示意, 假设新网格中心点  $P(x_p, y_p)$  落在  $O(x_o, y_o)$  点为存储中心的旧网格  $\triangle ABC$  上。假设在时间  $\Delta t$  内  $O$  点移动到  $P$  点, 则网格移动速度有:

$$\begin{cases} x_t = \frac{x_p - x_o}{\Delta t} \\ y_t = \frac{y_p - y_o}{\Delta t} \end{cases} \quad (6.11)$$

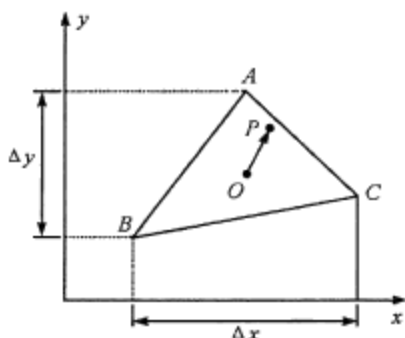


图 6.7 二维移动网格

有限体积方法的满足稳定性条件为:

$$\Delta t \leqslant CFL \frac{V}{(|u - x_t| + a) \Delta y + (|v - y_t| + a) \Delta x}$$

进一步化为更严格的限制条件:

$$\Delta t \leqslant CFL \frac{V}{(|u| + a) \Delta y + (|v| + a) \Delta x + |x_t| \Delta y + |y_t| \Delta x} \quad (6.12)$$

其中  $V$  为  $z$  轴方向单位长度的控制体的体积 (实际上计算  $\triangle ABC$  则可),  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别是其在  $xoz$  和  $yozy$  上投影面积 (实际上就是线段本身数值)。

联立方程 (6.11) 和 (6.12), 消去网格移动速度  $x_t$  和  $y_t$ , 得到:

$$\Delta t \leqslant \frac{CFL \cdot V - (|x_p - x_o| \Delta y + |y_p - y_o| \Delta x)}{(|u| + a) \Delta y + (|v| + a) \Delta x} \quad (6.13)$$

上式有物理意义的条件是右端项大于零, 即:

$$|x_p - x_o| \Delta y + |y_p - y_o| \Delta x < CFL \cdot V$$

引入一个新的定义, 称  $N_V$  为动网格 Courant 数:

$$N_V = \frac{|x_P - x_O| \Delta y + |y_P - y_O| \Delta x}{V} \quad (6.14)$$

可以看出,  $N_V$  与流动参数无关, 也与各点坐标绝对值大小无关, 仅取决于新旧网格的相对位置和旧网格的形状参数。为了分析  $N_V$  取值范围, 对原来的控制体进行平移, 使得  $\triangle ABC$  的重心  $O$  位于坐标系原点, 再经过旋转, 使得待插值点  $P$  位于  $y$  轴正向, 如图 6.8 所示。在这一坐标系中动网格 Courant 数写为:

$$N_V = \frac{y_P \Delta x}{V} \quad (6.15)$$

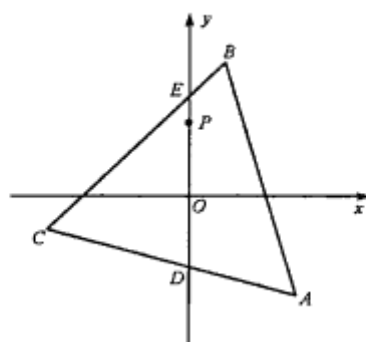


图 6.8 计算网格 Courant 数

假设  $A$  点和  $B$  点是三角形位于  $x \geq 0$  的两点, 坐标分别为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 那么根据三角形中心的性质可知  $C$  点坐标为:  $C(-x_1 - x_2, -y_1 - y_2)$ 。计算出  $\triangle ABC$  面积数值上等于控制体:

$$V = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & -x_1 - x_2 \\ y_1 & y_2 & -y_1 - y_2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

也可得到  $\triangle ABC$  与  $y$  轴交点的纵坐标分别为:

$$y_D = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{2x_1 + x_2} \quad \text{和} \quad y_E = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 + 2x_2}$$

根据以上几何关系, 还可以得到如下两个公式:

$$\Delta x = \max(AC|_x, BC|_x) = \max(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$$

$$y_P \leq \max(|y_D|, |y_E|) = \frac{|x_2 y_1 - x_1 y_2|}{\min(x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1)}$$

将以上结果代入 (6.15) 式, 得到:

$$N_v \leq \frac{\max(|y_D|, |y_E|) \Delta x}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\max(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)}{\min(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)}$$

当  $x_1 \geq x_2$  时:

$$\frac{\max(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)}{\min(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)} = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} \leq 2$$

当  $x_1 < x_2$  时:

$$\frac{\max(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)}{\min(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)} = \frac{x_1 + 2x_2}{2x_1 + x_2} \leq 2$$

因此, 二维移动网格传值方法的网格 Courant 数条件:

$$N_v \leq \frac{4}{3} < 2 \quad (6.16)$$

即在两步之内可以实现流场信息传递。

在应用动网格技术实现流场信息传递前, 首先计算动网格 Courant 数  $N_v$ , 然后与有限体积方法稳定性条件  $CFL$  比较, 如果  $N_v < CFL$ , 表明网格移动速度较慢, 在流场计算的时间步长内就可完成新旧网格之间信息传递, 如果  $N_v \geq CFL$ , 在局部流场按照计算稳定条件不一定能得到有效 (正的) 时间步长, 因此修改网格移动速度降低  $N_v$  值, 为此  $O$  点移动到  $P$  点需要分为多个时间步。根据以上推导网格移动可以两步实现, 每一步的推进步长  $\Delta t \in (\Delta t_1, \Delta t_2)$  需要在全流场满足:

$$\Delta t \leq \frac{(CFL - 0.5N_v) \cdot V}{(|u| + a)\Delta y + (|v| + a)\Delta x} \quad (6.17)$$

以上为三角形单元的稳定性条件, 对于其他形状的二维网格问题可以根据以上步骤进行推导。

### § 6.2.4 三维传递方法稳定性条件

新网格中心点  $P$  位于中心点为  $O$  的旧网格四面体  $ABCD$  中, 假设  $O$  点在时间  $\Delta t$  内移动到  $P$  点, 根据下式计算网格移动速度:

$$\Delta t = \frac{x_P - x_O}{x_t} = \frac{y_P - y_O}{y_t} = \frac{z_P - z_O}{z_t} \quad (6.18)$$

有限体积方法的稳定性条件为:

$$\Delta t \leq \frac{CFL \cdot V}{(|u - x_t| + a)S_x + (|v - x_t| + a)S_y + (|w - x_t| + a)S_z}$$

进一步化为更严格的限制条件:

$$\Delta t \leq \frac{CFL \cdot V}{(|u| + a)S_x + (|v| + a)S_y + (|w| + a)S_z + |x_i|S_x + |y_i|S_y + |z_i|S_z} \quad (6.19)$$

其中  $S_x$ 、 $S_y$  和  $S_z$  为四面体  $ABCD$  的特征投影面积。

联立方程式, 得到:

$$\Delta t \leq \frac{CFL \cdot V - (|x_P - x_O|S_x + |y_P - y_O|S_y + |z_P - z_O|S_z)}{(|u| + a)S_x + (|v| + a)S_y + (|w| + a)S_z} \quad (6.20)$$

定义三维动网格 Courant 数  $N_V$  为:

$$N_V = \frac{|x_P - x_O|S_x + |y_P - y_O|S_y + |z_P - z_O|S_z}{V} \quad (6.21)$$

可以看出,  $N_V$  与各点坐标绝对值大小无关, 仅取决于新旧网格的相对位置和旧网格的形状参数。采用坐标系平移使  $O$  点位于原点,  $O$  点与旧网格的 4 个顶点相连, 形成 4 个四面体, 包含新网格  $P$  点的四面体记为  $ABCO$ , 坐标系旋转使得  $P$  点位于  $z$  轴负向, 如图 6.9 所示, 设  $P$  与  $\triangle ABC$  平面交点为  $H$ 。在  $xoy$  平面内, 三角形  $\triangle ABC$  和  $D$  点的投影记为  $\triangle abc$  和  $d$ , 由于  $P$  点位于四面体  $ABCO$  中,  $O$  点必然落在  $\triangle abc$ , 利用这一特性分析特征投影面积  $S_z$  的取值范围。

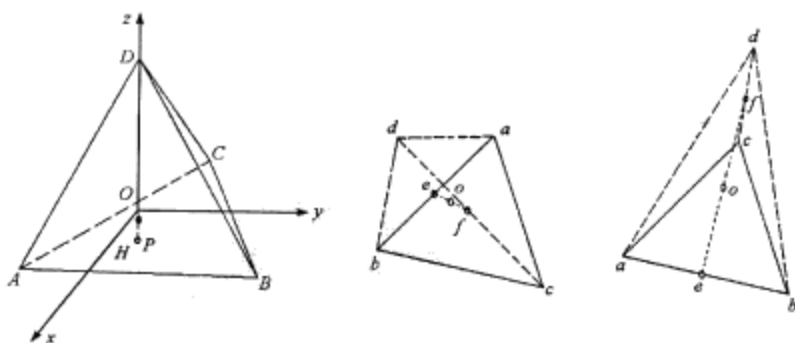


图 6.9 计算网格 Courant 数

如果  $d$  点落在  $\triangle abc$  内部, 那么  $S_z = S_{abc}$ , 如果  $d$  点不在  $\triangle abc$  内, 分为  $d$  点在线段  $ab$  外侧和  $d$  点在  $c$  点外侧两种情况, 如图 6.9 所示。  $ab$  中点记为  $e$ ,  $cd$  中点记为  $f$ 。根据  $O$  点定义, 知:

$$x_a + x_b + x_c + x_d = 0 \quad \text{和} \quad y_a + y_b + y_c + y_d = 0$$

得到  $e$  和  $f$  坐标满足的关系:

$$0.5(x_a + x_b) = -0.5(x_c + x_d) \quad \text{和} \quad 0.5(y_a + y_b) = -0.5(y_c + y_d)$$

由于  $e$  在  $\triangle abc$  边界上, 推导出  $f$  点位于  $\triangle abc$  内。

对于  $d$  点在线段  $ab$  外侧情况, 两个四边形面积相等  $S_{aqbc} = S_{aqbd} = \frac{1}{2} S_Z$ ,

由于  $S_{abc} \geq S_{qbc}$ , 得到  $S_{abc} \geq \frac{1}{2} S_Z$ 。  $d$  点在  $c$  点外侧情况, 存在如下关系:

$$S_{acd} = S_{bcd}, \quad S_{abo} = S_{ado} = S_{bdo}, \quad S_{abo} \leq S_{adc}, \quad S_Z = S_{abc} + S_{acd} + S_{bcd}$$

推导出:  $S_{abc} \geq \frac{1}{3} S_Z$ 。

四面体  $ABCO$  的体积:

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{abc} |z_H| = \frac{1}{4} V_{ABCD}$$

把以上关系带入到动网格 Courant 数计算公式中:

$$N_V = \frac{|z_P| S_Z}{V} \leq \frac{|z_H| S_Z}{V} = \frac{9}{4} \quad (6.22)$$

按照以下关系可以得到满足全流场稳定性和动网格 Courant 数的时间推进步长:

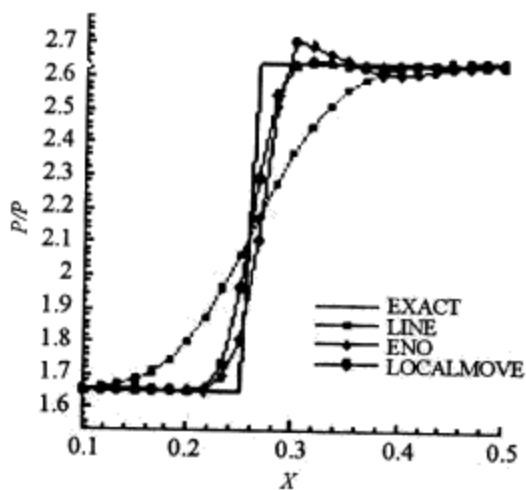
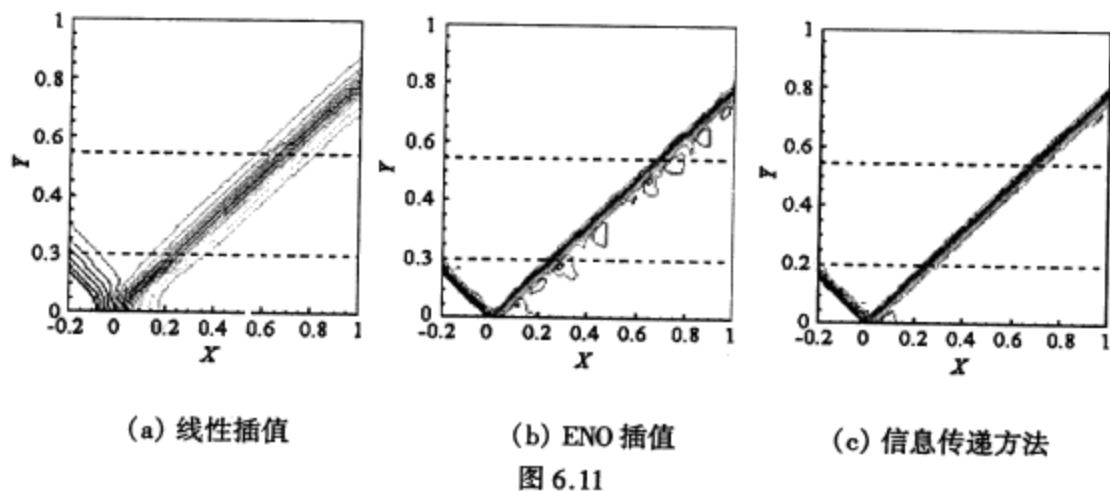
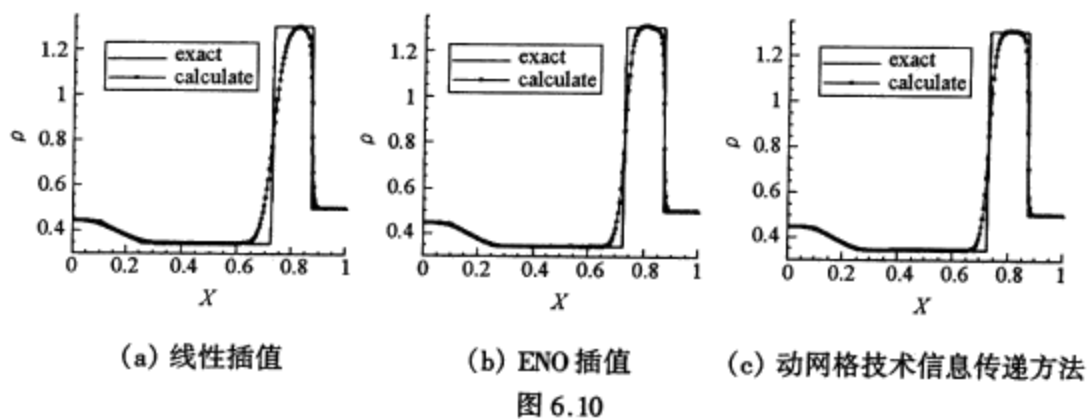
$$\Delta t \leq \frac{(CFL - N_V/3) \cdot V}{(|u| + a)S_x + (|v| + a)S_y + (|w| + a)S_z} \quad (6.23)$$

即新网格中点  $P$  位于任意四面体  $ABCD$  中, 三步内可以从  $O$  点移动到  $P$  点实现流场信息传递。

### § 6.3 流场信息传递方法验证算例

采用移动网格技术实现流场不同位置信息传递的原理简单, 理论上这种方法的精度就是求解流场的数值方法的精度, 传递过程本身不引入新的误差。下面通过模型问题对其进行验证。

采用以上信息传递方法求解例 6.1 和例 6.2 的问题, 计算结果与前面线性插值方法和 ENO 插值方法的比较见图 6.10 和图 6.11, 图 6.12 是例 6.2 在  $y = 0.2$  等高线上压力分布比较。可以看出, 本章介绍的方法的间断分辨率比线性插值方法高, 和 ENO 插值方法相比没有出现任何非物理振荡现象, 验证了前面的理论。



为了考察三维情况,设计如下算例 6.3,模型参见图 6.13 示意,在环境大气条件下,  $\text{length}:\text{width}:\text{height} = 2:0.25:1$  的矩形计算区域内有两个圆柱,其中,圆柱①的质心位于  $(-0.4, 0.78, 0.125)$ , 计算过程中保持固定不动,圆柱②的质心位于  $(-0.4, 0.22, 0.125)$ , 假设其无量纲质量为  $m = 1$ , 在气动力作用下可以运动。马赫数  $M_\infty = 2.96$  的运动激波从计算区域上游进入,遇到物体以后产生绕射、反射等非定常流动现象,同时,诱导圆柱②运动。不考虑重力和摩擦力等因素,圆柱②的运动特性完全由气动力决定。

采用动网格技术开展流动模拟,图 6.13 中给出计算初始网格、无量纲时间为  $t = 0.2$  和  $t = 0.4$  的压力云图,图中上面的圆柱是圆柱①,下面的圆柱是圆柱②。 $t = 0.2$  时刻的图中清晰反映出平面激波遇到物体发生反射,弓形反射在物体上游和壁面附近相交、激波穿越物体时绕射及其后驻点汇聚反射等一系列复杂的物理现象。尽管激波接触物体反射引起的气动力很大,但是物体从静止加速需要一定时间,因此在  $t = 0.2$  时刻两个圆柱位置差异很小,流场看不出明显的不对称。到了  $t = 0.4$  时刻圆柱②在气动力作用下运动,产生的稀疏波赶上上游的反射激波使其变弯曲,流场明显是不对称的。

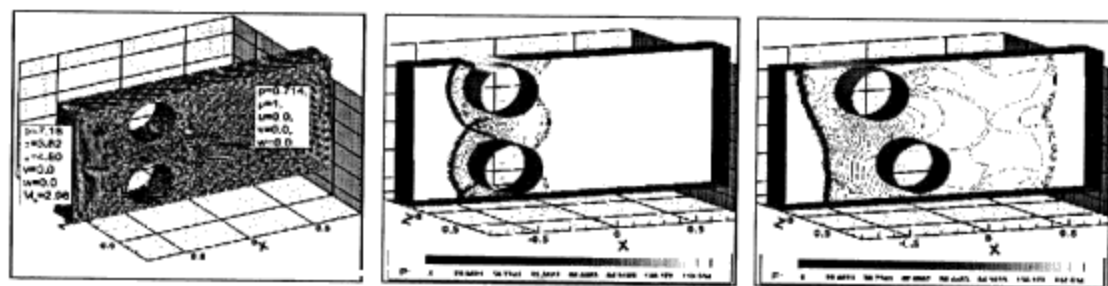


图 6.13 计算区域、网格和不同时刻流场压力云图

流动模拟过程中,网格随着圆柱②运动变形严重,在  $t = 0.332$  时进行了局部网格重构,重构前后物体附近网格见图 6.14。分别采用线性插值、Weighted Least-Squares 插值方法和动网格信息传递方法得到重构后网格点的流场参数,然后继续计算。Weighted Least-Squares 插值方法与前面的 ENO 较为相似,不同之处在于求解 (6.6) 式中梯度时所采用的条件,它是采用相邻单元存储点和插值点之间距离倒数作为权函数来平均得到新网格点上的物理量。

图 6.15 给出不同方法得到的圆柱受力情况,不同的传值方法有明显差异。可以看出,尽管静止圆柱①附近没有网格重构,但是,圆柱②附近网格重构以后插值方法引入误差在流场内扩散,大致  $t = 0.36$  开始圆柱①的  $F_x$  出现波动,由于流动向下游扫过,到大约  $t = 0.39$  时插值误差对驻点高压区内的影响减

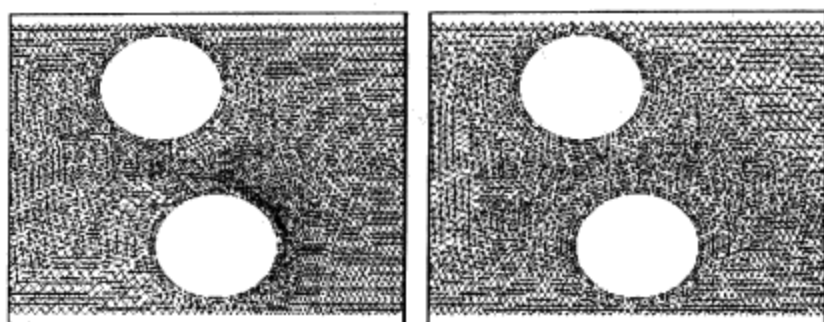
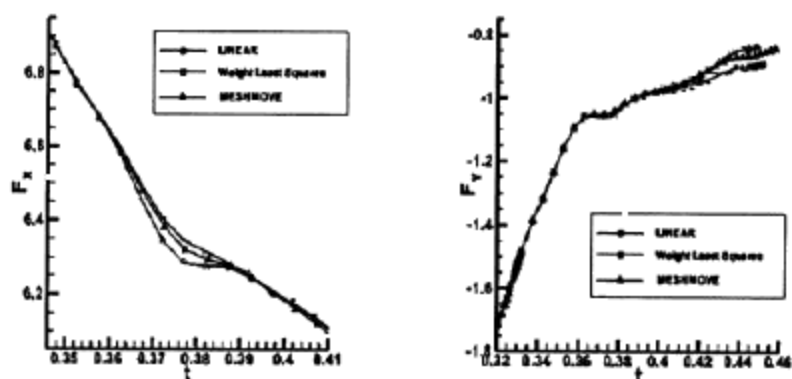
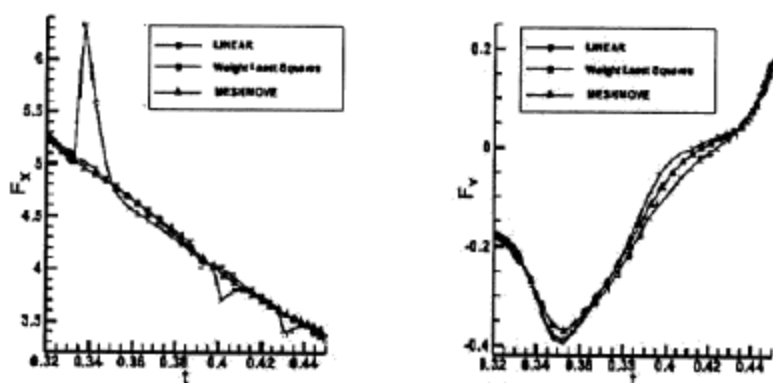


图 6.14 重构前后局部网格

弱，两种插值方法的曲线逐渐趋近于动网格信息传递方法的曲线。但是，插值误差对圆柱①  $F_y$  的影响反映了扰动在壁面和两个圆柱附近传播，这些区域的亚声速特性使这种误差传播规律变得非常复杂，表现为圆柱①的  $F_y$  曲线到了  $t = 0.42$  以后才开始有明显区别。



(a) 静止圆柱受力



(b) 运动圆柱受力

图 6.15

运动圆柱②附近网格重构以后立刻引起  $F_x$  剧烈变化, 不过很快恢复到原来的位置, 由于插值扰动在圆柱②下游反射等因素, 在  $t = 0.39$  以后  $F_x$  有两次小的波动。圆柱②的  $F_y$  变化规律较为复杂, 在  $t = 0.35$  附近线性插值和 Weight Least-Squares 插值方法计算曲线非常接近, 在  $t = 0.41$  插值方法之间、动网格方法曲线均有差异, 动网格方法计算曲线落在它们之间, 其机理还有待进一步讨论。

## 第七章 非结构网格计算程序的验证

数值模拟只是对真实物理现象的近似, 计算结果包含各种误差, CFD 软件在应用前必须进行有效性和可行性检验。本章介绍用于多体分离非定常计算的 CFD 软件的验证工作, 检验软件的有效性和精度。另一方面, 由于包含动边界的实验很少, 能够用于算法验证的超声速动边界问题更少, 为了解决这一问题, 本章设计了激波诱导轻质物体运动的试验方案, 为动边界非定常问题提供可信度验证。

### § 7.1 复杂外形的定常流动验证算例

为了考核基于非结构网格的计算软件的空间分辨率, 进行如下定常算例的计算和比对工作。

#### § 7.1.1 跨声速飞机标模<sup>[2]</sup>

计算外形取自文献 [18]。为采用超临界机翼的大型客机的简化模型, 被国内外 CFD 研究工作者广泛用来考核跨声速数值模拟方法。计算区域包含 27302 个结点、134117 个四面体单元。图 7.1 是表面计算网格及翼面附近放大图。

来流马赫数为  $M_\infty = 0.77$ , 以半展长进行无量纲化, 采用参数  $\eta = 2z/l$  表示展向位置, 图 7.2 是迎角为  $\alpha = 1.12^\circ$  时, 在  $\eta = 0.277$  和  $\eta = 0.55$  两个位置沿弦向的压力系数与文献测压实验结果的比较, 图 7.3 是迎角  $\alpha = 0.63^\circ$  时的比较情况。由图可见, 计算得到的压力系数与实验吻合较好, 二者在激波位置附近存在差异是由于实验中超临界机翼上的边界层干扰所致。

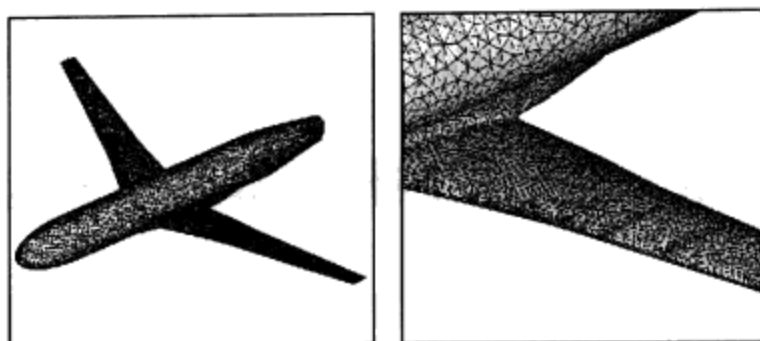
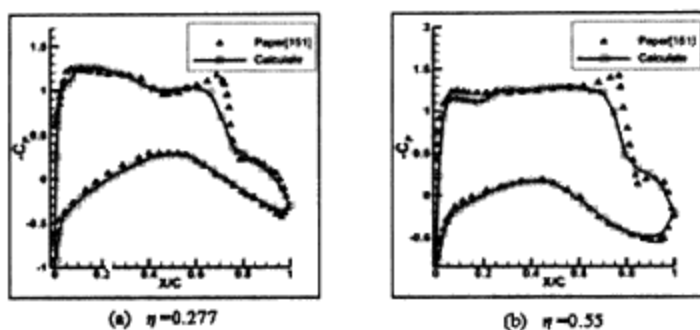
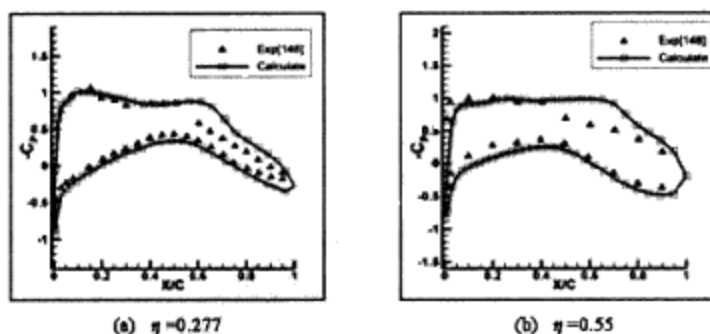


图 7.1 民机外形表面计算网格及局部放大图

图 7.2 本文计算与文献比较 ( $\alpha = 1.12^\circ$ )图 7.3 本文计算与文献比较 ( $\alpha = 0.63^\circ$ )

### § 7.1.2 类航天飞机三维定常绕流<sup>[2]</sup>

外形取自文献 [19], 为类航天飞机模型, 表面计算网格如图 7.4 所示, 计算区域包含 22481 个结点、113655 个四面体单元。



图 7.4 表面网格

图 7.5 给出马赫数  $M_\infty = 2.5$ 、迎角  $\alpha = 0^\circ$  飞行条件下对称剖面压力系数比较，迎风面与基于结构网格的 NS 方程计算结果比较一致；但在背风面中发现有一个区域存在差异，观察计算外形，发现此处存在一个微小凹陷，而采用 NS 方程计算的结构网格在微小凹陷区域跨度过大，因此没有模拟到此微小凹坑引起气流的细微变化。这也体现了非结构网格的优势。

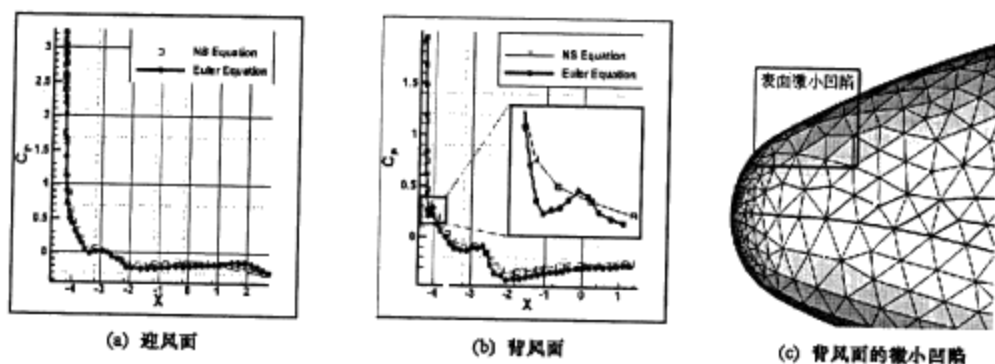
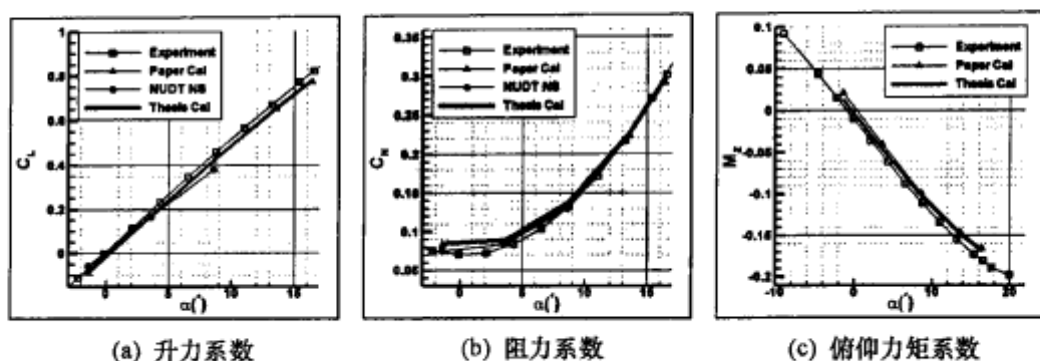
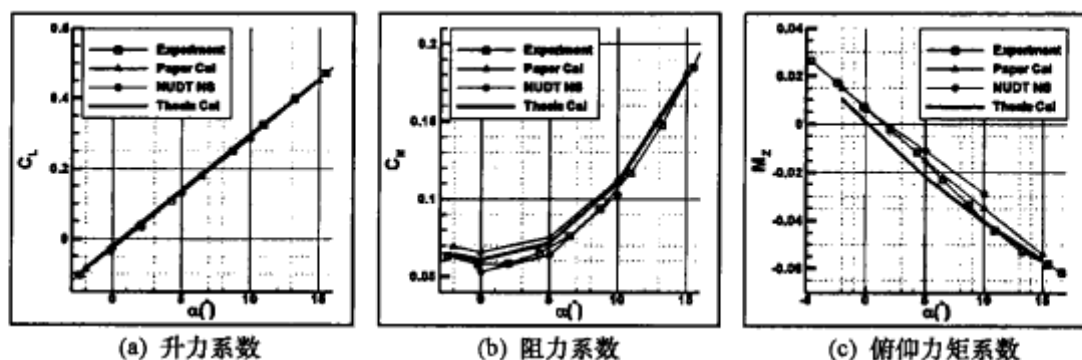


图 7.5 芯级飞行器对称剖面压力系数比较

图 7.6 和图 7.7 为马赫数  $M_\infty = 1.5$  和  $M_\infty = 2.5$  条件下气动力系数随迎角变化曲线，每图包含四条曲线，分别为基于非结构 Euler 方程计算结果、本课题组采用基于结构网格的 NS 方程计算结果、其他单位的实验结果和基于结构网格的 NS 方程计算结果。比较发现，本书所得的计算结果与 NS 方程计算及实验数据均能较好吻合。虽然本书采用 Euler 方程未考虑粘性，由于这类外形超声速、小迎角飞行条件下气动力主要取决于翼身组合体头部激波和膨胀波等结构，粘性起主导作用的底部流动小于总阻力的 10%，同时本书计算时模拟了底部流动，尽管得到的底部压力与 NS 方程计算结果有差异，但是也考虑底部压力对阻力的贡献。因此本书的计算气动阻力与实验和 NS 方程计算结果较为一致是可信的。

图 7.6  $Ma = 1.5$  芯级飞行器受力(力矩)随迎角变化图 7.7  $Ma = 2.5$  芯级飞行器受力(力矩)随迎角变化

## § 7.2 非定常动网格验证算例

非定常地面实验同其他空气动力学问题相比,由于要模拟时间相关的模拟参数,极大地增加了测试技术难度,地面设备设计和研制本身就属于前沿关键技术。例如,作为飞行器经典的流固耦合——颤振问题,是气动力、弹性力和惯性力耦合作用产生的复杂物理现象,缩尺模型在风中进行颤振试验时,一般情况下很难做到几何形状、结构动力学和气动力相似律全部满足,通常根据具体情况忽略某些次要因素。因此,颤振地面实验数据的精度还难以满足设计要求,国内飞行器设计中必要的气动弹性实验有一部分需要与国外协作进行。

### § 7.2.1 俯仰振动的 NACA0012 翼型绕流<sup>[1]</sup>

NACA0012 翼型在马赫数  $M_\infty = 0.755$  自由来流中绕 1/4 弦点作简谐俯仰振动，翼型迎角  $\alpha(t)$  的变化规律是：

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \sin(kt)$$

其中平均迎角  $\alpha_0 = 0.016^\circ$ ，振幅  $\alpha_m = 2.51^\circ$ ，无量纲角频率  $k = \omega c / u_\infty = 0.1628$ ， $c$  表示弦长， $\omega$  是角频率。图 7.8 是翼型附近初始网格，计算区域外边界为圆形，半径为 24 倍弦长，共包含 3199 个结点，壁面点数为 131，形成 6236 个三角形单元。

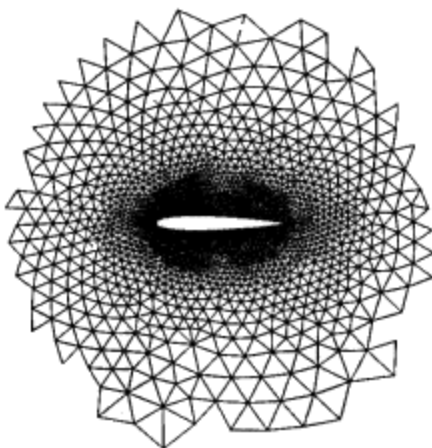


图 7.8 NACA0012 初始网格

首先，计算平均迎角的定常流场，然后在定常收敛解的基础上，耦合网格运动进行非定常流场计算，为得到周期解，计算了三个周期。计算得到的第三周期中八个瞬时的壁面压力系数分布示于图 7.9 (a) 至图 7.9 (h)，标注  $\phi(t)$  是该时刻所处的相位，图中给出了文献 [20] 所引用的实验结果用以比较，本书作者所得到的计算结果与风洞测压实验结果十分接近。

图 7.10 给出了计算得到的翼型升力系数随迎角的变化，与文献 [20] 的计算结果及其引用的实验结果进行比较。可以看出，本书的计算结果与 Batina 的计算结果符合得很好，但与实验值稍有差异。图 7.11 是俯仰力矩系数随迎角的变化，由于力矩系数的矩心位于 1/4 弦长处，力矩系数的量级很小，试验测量困难，各文献中很少进行比对。NACA0012 是对称翼型，定常流动条件下，迎角  $\alpha = 0^\circ$  对应的升力和俯仰力矩  $C_L = M_z = 0$ ，但是，在动态过程中，从正迎

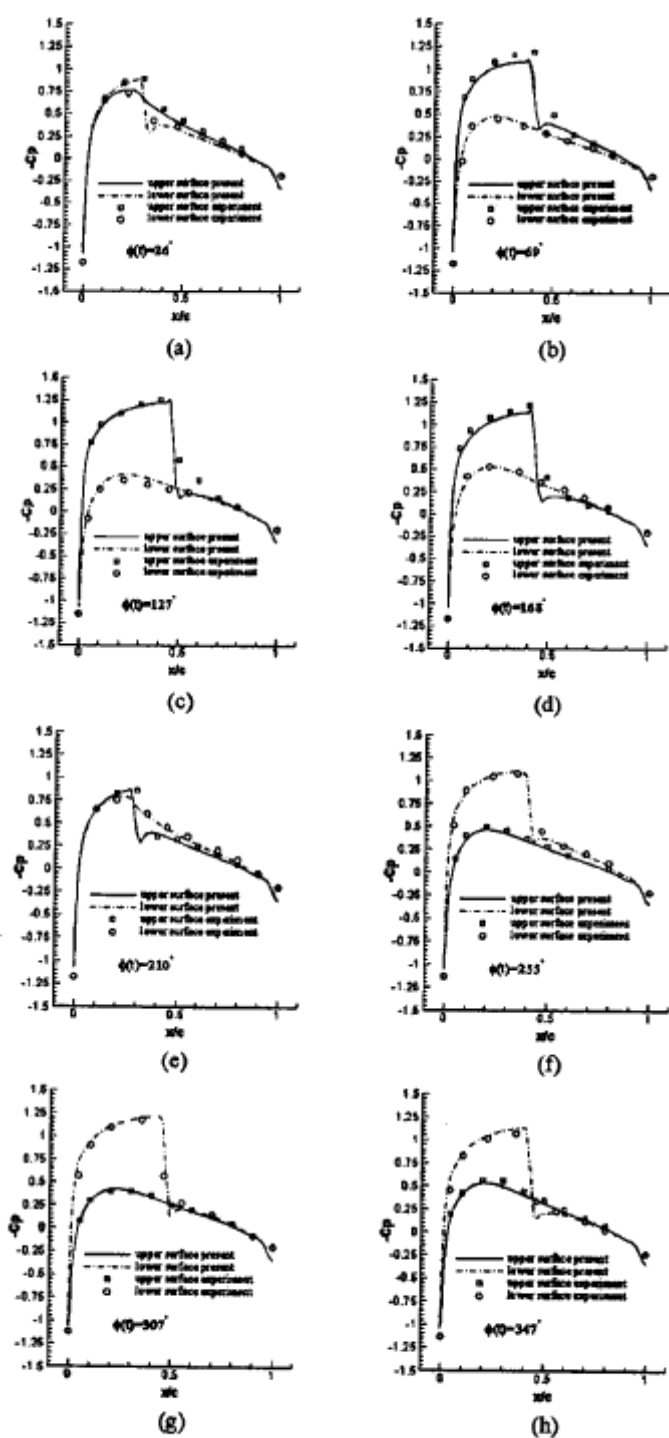


图 7.9 第三周期若干瞬时的壁面压力系数分布

角回落经过  $\alpha = 0^\circ$  时  $C_L > 0$  和  $M_z < 0$ , 从负迎角增加经过  $\alpha = 0^\circ$  时,  $C_L < 0$  和  $M_z > 0$ 。这种差异是由于非定常流动的迟滞引起的, 可以结合上面的测压信息进行机理分析。

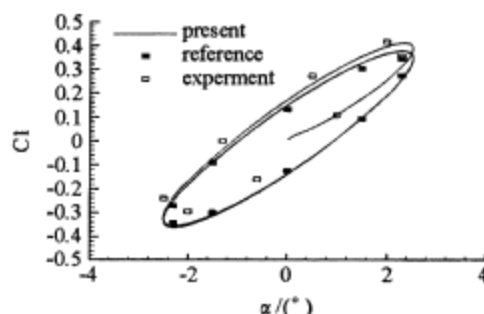


图 7.10 升力系数随迎角的变化

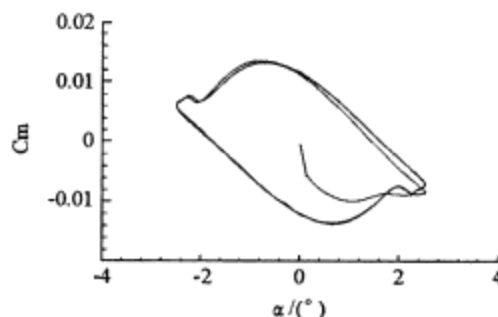


图 7.11 俯仰力矩系数随迎角变化

从图 7.9 可知在翼型的周期运动中, 激波位置的变化大约在 25% 弦长范围内, 进一步可分析引起极限环的机理。翼型在  $\varphi = 26^\circ$  负迎角时, 上表面存在激波, 下表面呈亚临界状态, 由于激波运动是迎角增加引起的, 总是滞后于相同迎角定常状态的激波位置, 导致前半周期动态升力系数小于相同迎角的定常状态值; 在  $\varphi = 210^\circ$  (不是最大迎角) 以后, 上表面激波减弱, 生成下表面激波, 升力开始减小, 同样由于激波位置滞后使得动态回落速度较慢, 升力系数大于相同迎角的定常状态值。简谐俯仰振动速度越快, 激波位置滞后效应越明显, 所形成的极限环也会逐步从图 7.10 的椭圆形向圆形变化。

### § 7.2.2 振动矩形机翼绕流<sup>[1,2]</sup>

这是 AGARD 在 Royal Aeronautical Establishment (RAE)  $8 \times 8\text{ft}$  风洞中完成的振动矩形半机翼模型测压实验<sup>[21]</sup>，在完成刚性模型试验后开展了气动弹性研究，因此，该实验数据也成为数值模拟气弹之前验证三维非定常数值计算方法准确性的经典算例。

矩形半机翼采用 NACA64A010 翼型，展弦比为 4，来流马赫数  $M_\infty = 0.8$ ，机翼迎角  $\alpha(t)$  的变化规律是：

$$\alpha(t) = -\alpha_{\max} \sin(kt)$$

其中振幅  $\alpha_{\max} = 1.0^\circ$ ，无量纲角频率  $k = \omega c / u_\infty = 0.268$ ， $c$  表示弦长，振动转轴在  $1/2$  弦线处。

为了分辨出网格粗细对计算结果的影响，生成了三个密度不同的网格以便于比较，三个计算网格如图 7.12 所示。其中网格 1 具有 9 968 个网格点、51 676 个网格单元；网格 2 具有 19 803 个网格点、102 203 个网格单元；网格 3 只在局部进行了加密，具有 11 557 个网格点、60 544 个网格单元。三个网格具有相同的计算区域，弦向和法向的范围都是 12 倍弦长，展向范围为 6 倍弦长。首先在这三套网格上计算了定常流场，所有计算结果与实验数据吻合较好，捕捉到的激波位置一致，但是，网格 1 的分辨率较低，网格 2（密网格）的结果与实验值最为接近。网格 3 的计算结果与网格 2 的结果差别很小，表明局部加密既提高了计算效率又保持了计算精度。

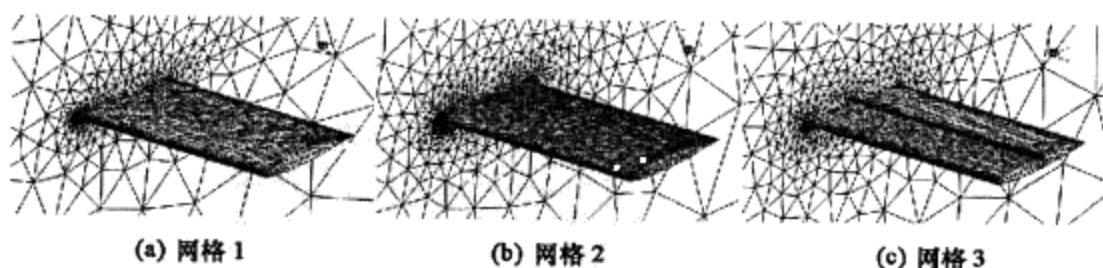


图 7.12 矩形机翼表面及对称面网格

定常计算结果的细致比较参考文献 [1, 22]。

非定常计算采用了网格 1 和网格 3 比较网格对结果的影响。在计算得到两个周期解以后，采用文献中数据处理方法，为区分相内 (in-phase) 和相外 (out-of-phase) 压力，非定常压力系数按傅立叶系数分解为实部和虚部，即：

$$\operatorname{Re}(C_p) = \frac{2}{\alpha_{\max}(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} C_p(\tau) \sin(k\tau) d\tau$$

$$\operatorname{Im}(C_p) = \frac{2}{\alpha_{\max}(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} C_p(\tau) \cos(k\tau) d\tau$$

图 7.13 和图 7.14 分别为三个典型展向位置的非定常实压力系数和虚压力系数分布。图 7.13 (a) 所示的 50% 半展长位置的实压力系数中, 激波位置比实验结果偏后, 这主要是由于没有考虑粘性的原因。由于网格 3 在激波附近局部加密, 其结果的激波压力峰值高于网格 1 的结果。波前的压力降幅不及实验结果同样也是因为网格较粗。图 7.13 和图 7.14 明显地表示出, 在一个振动周期内, 激波移动的范围约占 25% 弦长。以上两图所示的非定常结果中, 77% 和 94% 半展长位置的计算值与实验值非常吻合。

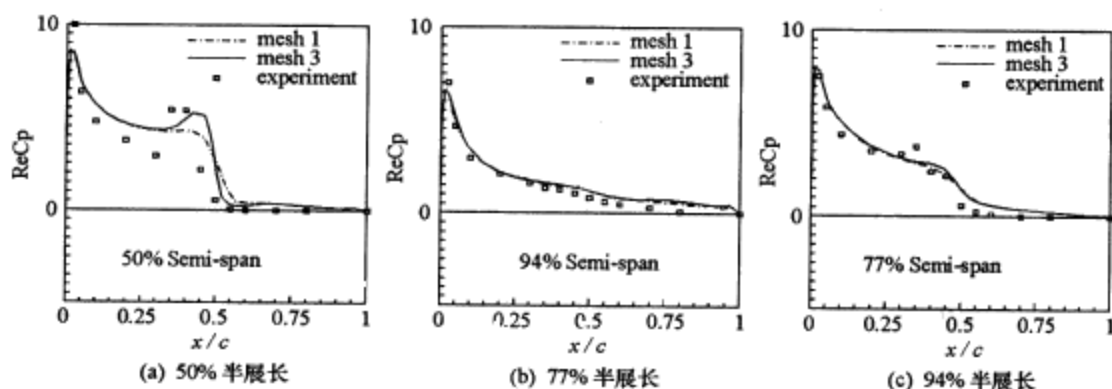


图 7.13 三个典型展向位置的非定常实压力系数分布

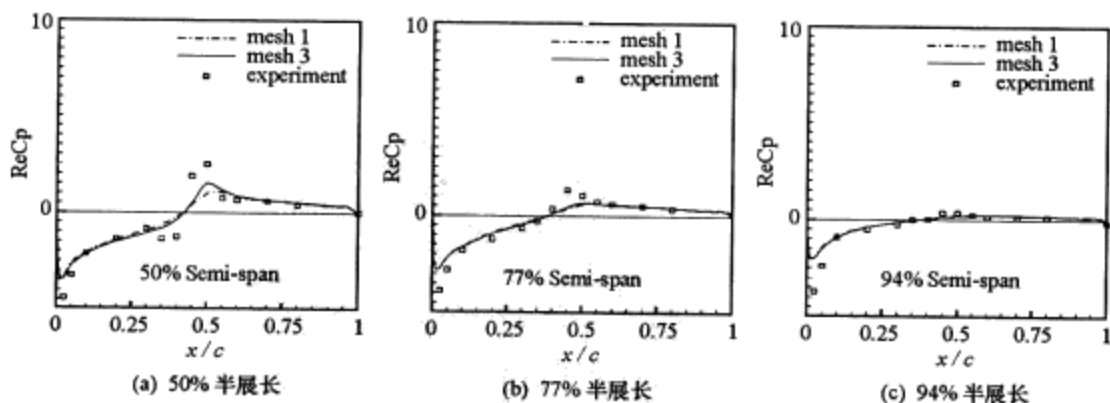


图 7.14 三个典型展向位置的非定常虚压力系数分布

### § 7.2.3 飞船返回舱配平迎角的动态确定<sup>[1,23]</sup>

再入飞行器的配平迎角是影响其飞行轨迹、控制性能和落点精度的重要因素，因此精确确定配平角是再入飞行器外形设计中的关键环节。配平迎角通常由实验测定，主要方法有测力法、自由飞方法和自由翻滚法。测力法是通过测定多个迎角下飞行器的气动力矩，找出对质心力矩为零的迎角即为配平角，由于在配平角附近力矩很小且变化平坦，难以准确测定，因此测力法误差较大。自由飞方法一般在弹道靶中进行，由于模型较小，保证偏心距离的准确模拟也是很困难的。自由翻滚法是模型围绕重心处的支撑机构可以在小范围内作自由俯仰转动，达到稳定就是配平迎角，该方法依赖于精确的角度测量手段。文献[24]报道“联盟”飞船返回舱研制中采用了测力法和自由翻滚法。

本书作者发展的自由振动法与自由翻滚法原理相同，利用非结构动网格技术，直接计算确定配平迎角。其基本思想是：允许飞行器绕通过质心且垂直于对称面的轴自由转动，首先将飞行器固定在任意给定的初始迎角位置计算定常流场，然后释放飞行器，令其在气动载荷下自由振动，最终衰减收敛到配平迎角。为加快衰减过程，可人为设定飞行器的转动惯量和阻尼力矩。

计算对象选为带控制翼的类“联盟”飞船返回舱，图 7.15 是返回舱表面网格，整个计算网格具有 19 970 个网格点、104 868 个单元。来流马赫数  $M_\infty = 4.0$ ，初始迎角选为  $\alpha_0 = 15^\circ$ 。对不同的转动惯量和阻尼力矩我们计算了如下五种状态：

$$\text{A. } T_z = -0.01\omega, \quad I_z = 0.1$$

$$\text{B. } T_z = -0.02\omega, \quad I_z = 0.1$$

$$\text{C. } T_z = -0.03\omega, \quad I_z = 0.1$$

$$\text{D. } T_z = -0.05\omega, \quad I_z = 0.1$$

$$\text{E. } T_z = -0.03\omega, \quad I_z = 0.05$$

其中  $T_z$  是人为给定的阻尼力矩，与角速度  $\omega$  成正比但方向相反， $I_z$  是转动惯量，以上各参数都是无量纲量。由于本节非定常计算的目的在于得到配平迎角，而并不关心返回舱真正的动态响应，选取不同的转动惯量和阻尼力矩是为了验证计算结果的重复性并加快衰减过程，因此上述惯性参数没有实际物理意义。

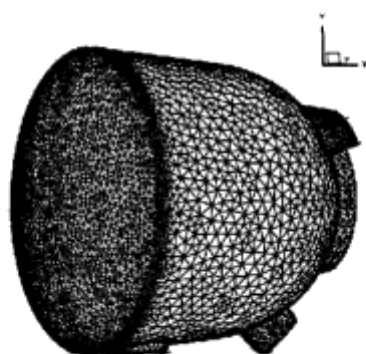


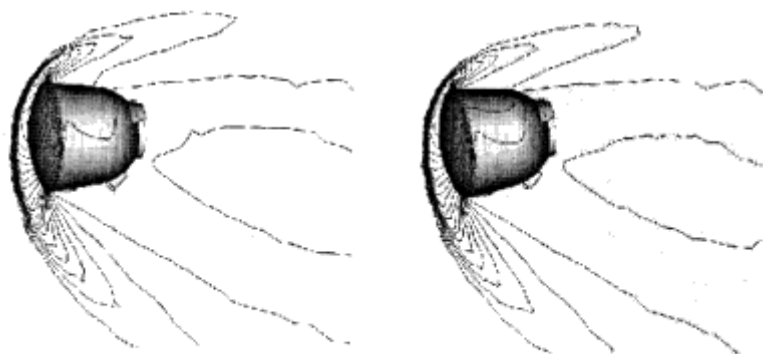
图 7.15 飞船返回舱表面网格

振动衰减收敛即计算终止的判据为

$$\left| \frac{C_m^n - C_m^{n-500}}{t^n - t^{n-500}} \right| \leq 0.01 \quad \text{且} \quad |C_m^n| \leq 0.0001$$

式中  $C_m$  为俯仰力矩系数,  $t$  为时间,  $n$  表示时间层。

图 7.16 分别给出了初始迎角位置计算得到的压力等值线, 以及振动衰减收敛到配平迎角位置时的压力等值线。图 7.17 给出了迎角的振动衰减历程, 图中显示本书计算得到的配平迎角为  $20.4^\circ$ 。采用不同的惯性参数计算得到的结果相同, 说明数值方法具有较高的可靠性。表 7.1 是本书计算结果与实验结果的比较情况, 其中实验数据来自于文献 [24] 中, 在中国空气动力研究院风洞中采用测力法得到, 该文献还引用了国外采用自由翻滚法得到的结果, 可以看出本书计算落在两个实验值中间。引起计算和实验结果差异的原因, 除了计算方法误差外, 自由翻滚法实验中支杆伸入模型内部形成的空腔也会产生气动力干扰。



左: 初始迎角位置; 右: 配平迎角位置

图 7.16 压力等值线

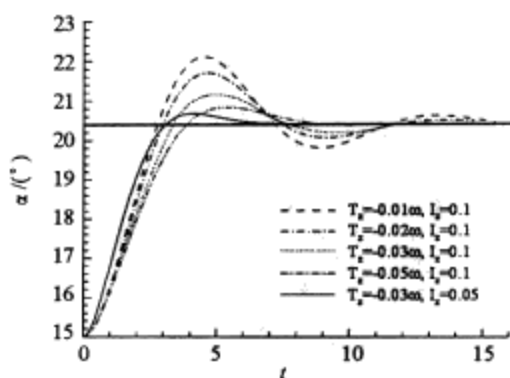


图 7.17 迎角的振动衰减历程

表 7.1 本文计算结果与实验结果的比较

|                      | 测力法   | 自由翻滚法 | 本文计算  |
|----------------------|-------|-------|-------|
| $\alpha_T(^{\circ})$ | 21.70 | 18.75 | 20.40 |

### § 7.3 运动物体实验和计算验证<sup>[2]</sup>

随着计算流体力学 (CFD) 在工程应用中地位提高, CFD 精准度问题引起广泛关注。在文献 [25] 中介绍, 1992 年 NASA 在 CFD 研究领域总投资 1 399.8 万美元, 包括算法、应用、网格生成、可视化、转捩、湍流模型、验证和确认等多个方面, 其中验证 (Verification) 与确认 (Validation) 就达到 713.5 万美元, 由此可见这一问题在 CFD 发展中所占的重要地位。文献 [26] 对国外文献调研以后认为, 近年来美国等国家对 CFD 验证和确认工作的支持力度不但没有减少, 规模还在不断增大, 吸引了如波音公司等工程型号部门参加, 制定了长期发展规划。国内关于 CFD 可信度的研究也正逐步受到重视, 相关单位安排、组织了若干气动外形的数值计算和实验比对研究<sup>[27]</sup>。

在高超声速飞行器气动问题研究中, 会遇到如火箭级间分离、整流罩分离、子母弹抛洒等有相对运动的多体动力学系统绕流问题, 这类非定常流动的试验和计算还不完善, 经常简化为定常或准定常。在一些情况下, 由于准定常假设无法模拟流动的动态特性, 得到的数据定性规律都有问题。例如, 文献 [28] 中模拟马赫数为 6.5、高度 46km 飞行环境下子母弹抛壳动态过程时发现, 采用动网格技术进行非定常模拟得到的分离过程运动轨迹和姿态, 与国内

相关单位类似于 CTS 实验的准定常模拟结果相差很大。在 150ms 时动网格技术得到的壳片大约向外翻转  $10^\circ$ ，由于受到轴向气动力较小，轴向位置向后位移小于 20cm；这时准定常模拟壳片向外翻转  $30^\circ$ ，迎风面的气动力使其向后运动速度较快。飞行试验表明采用动网格技术模拟结果更准确。分析原因，除了对于壳片几何外形的刻画细致程度外，壳片穿越头部脱体激波过程中，内壁结构设计的筋条等不平整形状与激波有明显相互干扰，引起气动力的微小波动；更重要的是壳片运动产生的头部激波进入母弹空腔并多次反射，呈现高度非定常特征，有些流动图像在定常状态不可能产生。由于没有考虑壳片运动引起的卸载效应，按照准定常模拟得到的法向力和俯仰力矩较大，而时间推进步长比动网格过程大几个数量级，其间一直维持这种较大的值，使姿态出现异常迅速的发散也在预料之中。



图 7.18 子母弹抛壳动态过程（壳片运动轨迹、壳片内壁网格、气动力变化）

动边界实验非常困难，国内还没有马赫数大于 2 的 CTS 实验装置，风洞自由飞实验模拟参数有限、费用昂贵、测量困难。因此，部分工程研制中直接采用 CFD 模拟数据进行设计。国内许多研究单位开展这类多体动力学系统绕流模拟，除了中国空气动力研究与发展中心和中国空气动力研究院这两个专业研究单位外，国防科技大学、北京航空航天大学、南京航空航天大学、西北工业大学、北京理工大学等院校也开展了研究工作，但是，计算结果的试验验证几乎空白。国内外 CFD 验证和确认主要集中于低速和亚跨超流动，对于我们关心的超声速动边界问题还没有看到文献报道。

对于针对这一需求，根据高超声速多体动力学系统绕流特点，提出采用激波诱导轻质物体运动来开展动边界模拟问题的 CFD 验证和确认的试验方案，为动边界非定常计算方法提供可信度验证。

### § 7.3.1 实验方案

实验是用来验证计算模型的, 因此, 尽量避免实验过程中出现影响结果的不确定因素, 如流场品质、支架干扰、初始姿态等。为此, 设计如图 7.19 所示的实验方案, 激波管生成的平面激波推动轻质物体运动, 采用高速摄影仪捕捉轨迹。试验在中国科技大学流体力学实验室的激波管实现。激波管包括 8m 长高压段、3m 长低压段、双膜机构及真空腔, 内部截面尺寸  $80\text{mm} \times 130\text{mm}$ 。本实验旨在研究运动物体与气流的相互作用, 希望实验件在不发生变形条件下越轻越好, 因此, 选择比赛用的质量 2.7g、直径 40mm 标准乒乓球, 如图 7.19 所示。

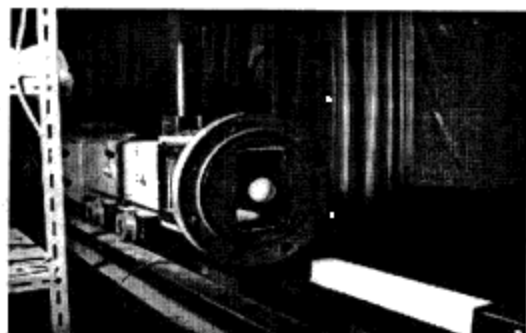
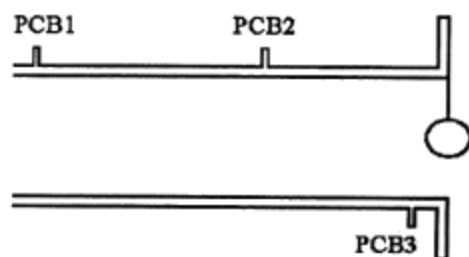


图 7.19 实验原理和模型安装

通过管壁安装压力传感器、触发示波器信号来测量激波速度。测量和数据采集系统包括压电传感器、电荷放大器和多通道高速数据采集卡、数据采集软件和计算机, 为防止测量系统误触发, 试验中将压力传感器安装在与激波管不共地的聚四氟乙烯座上。激波前是环境压力, 高压段的压力达到 0.3MPa 时破膜。通过各测压点的跳跃曲线计算运动激波速度, 表 7.2 中给出三个传感器距离激波管口的位置、传感器触发时序和计算得到的激波马赫数。由于激波受到管壁粘性影响, 向下游运动中存在能量消耗, 激波马赫数缓慢降低也是合理的。为了验证激波马赫数, 还对破膜以后形成的激波在管内运动过程进行模拟, 高、低压段的启动压力由实验压力给定, 也通过与实验测压点位置一致的观测点达到压力峰值的时间来计算激波马赫数, 结果列在表 7.2 中, 可以看出二者基本一致, 考虑到非结构网格模拟平面激波的困难和无粘控制方程, 计算结果误差是可以接受的。

表 7.2 实验测量的激波运动速度

| 传感器序号     | PCB1    | PCB2         | PCB3         |
|-----------|---------|--------------|--------------|
| 距出口距离     | 1 036mm | 453mm        | 30mm         |
| 触发时间 (s)  | 0       | 0.001 377 27 | 0.002 384 87 |
| 激波马赫数     |         | 1.243 90     | 1.239 57     |
| 马赫数 (计算值) |         | 1.241        | 1.242        |

实验模型安装有两种方式, 为便于观测早期模型位于激波管口 (称为敞口方式), 由于担心这种方式会受到激波出口以后不对称的影响, 后来改进为激波管内部通过光学窗口观测 (称为管内方式)。

### § 7.3.2 试验结果及其处理

采用高速摄影仪捕捉乒乓球运动轨迹。从验证需求上说, 摄影仪的采集频率越高, 实验得到可供计算比对的有效信息越多, 但是, 提高采集频率以减少像素为代价, 影响图像清晰度, 经过多次试验探索, 设定摄影仪的参数为频率 3000fps 和快门速度  $168\mu\text{s}$  较为合适, 既可以避免运动轨迹出现虚影, 又可获得清晰的乒乓球边界轮廓。

由于实验室条件所限, 拍摄的原始图像包含有严重的背景噪声, 原始图像如图 7.20 (a), 需要进行图像降噪和清晰化处理, 然后进行轮廓线提取。在计算机视觉和图像分析领域中, 有 Roberts、Sobel、Prewitt 和 Canny 等图像边缘检测方法, Roberts 检测方法对具有陡峭低噪声的图像处理效果较好, 但是提取边缘比较粗糙, 影响准确定位; Sobel 检测方法对灰度渐变和噪声较多的图像处理效果较好, 但边缘定位也不准确, 往往边缘上出现不止一个像素; Prewitt 检测方法对灰度渐变和噪声较多的图像处理效果较好, 但边缘较宽而且断点多。Canny 检测方法使用两种不同的阈值分别检测强边缘和弱边缘, 相比较而言, 不容易受到噪声干扰, 尤其对于弱边缘与强边缘相连时, 能够检测到真正的弱边界, 本文采用该方法。

Canny 方法的基本思想是用 Gauss 滤波器进行图像平滑, 去除图像中的部分噪声; 用 Gauss 算子的一阶微分对图像进行滤波, 得到图像梯度的强度与方向; 对梯度采用“非极大值抑制” (Non Maxima Suppression, NMS) 和滞后阈值

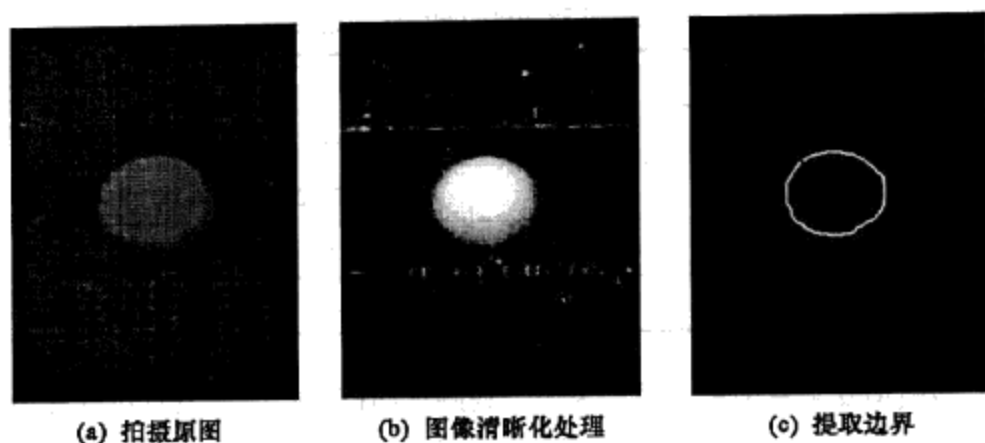


图 7.20 图像处理过程

处理，最后设定高低双阈值进行边缘连接。具体实现步骤如下：

- (1) 首先用 2D 高斯滤波模板进行卷积以消除噪声；
- (2) 利用导数算子找到图像灰度沿水平、竖直两个方向偏导数，并求出梯度大小；
- (3) 利用相邻区域梯度大小确定梯度的方向，大致分为水平、竖直和两个对角线四个方向；
- (4) 通过梯度的方向就能找到这个像素梯度方向的邻接像素；
- (5) 遍历图像，若某个像素的灰度值与其梯度方向上前后两个像素的灰度值相比不是最大的，那么这个像素的值变为 0，即不是边缘；
- (6) 使用累计直方图计算两个阈值，认为大于最大阈值是边缘、小于最小阈值不是边缘，介于两者之间的情况，需要根据像素邻近的像素中来判断，如果也超过最大阈值，它也是边缘。

采用 Canny 检测方法得到的清晰化图像和提取的轮廓线如图 7.20(b) 和图 7.20(c) 所示。

### § 7.3.3 整球的敞口实验及其数值模拟

首先进行整个乒乓球的敞口方式实验。

实验拍摄照片经图像处理，提取出边界点，然后采用最小二乘法拟合出乒乓球的质心位置。得到的乒乓球球心运动轨迹如图 7.21 所示，其中右侧图为运动初期轨迹的放大图。由图可见，乒乓球在气流的加速作用下，很快飞出了

拍摄窗口, 而重力决定的纵向位移不显著, 分离轨迹几乎水平。由右侧放大图可见, 乒乓球开始移动后有向上的运动, 在理想情况下乒乓球纵向仅受重力, 造成向上移动的原因可能来自乒乓球的粘贴方法。由于乒乓球采用小块透明胶布粘贴在细绳一端, 胶布粘贴的紧密程度直接影响分离是否顺畅。实验中乒乓球运动轨迹第二点位置较第一点略高, 表明乒乓球在挣脱胶布粘贴时, 在细绳、重力及激波管高压气体的作用下产生了类似单摆的向上运动。

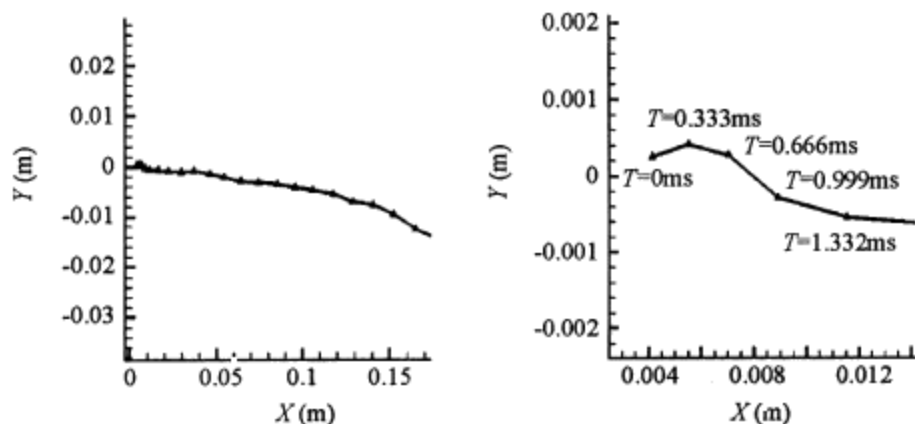


图 7.21 实验提取轨迹及初始时刻放大图

针对实验条件设定计算参数, 图 7.22 给出计算区域网格, 图中包含三部分内容: 全区域网格、高低压腔的隔膜机构、管口附近局部放大图。激波管支撑机构包括两条平行导轨及连接轨, 为了简化计算激波管支撑机构仅在管口附近划分网格。初始计算网格包含节点 51 965 个, 单元 252 239 个。激波管入口封闭; 出口边界足够大, 处理为无反射边界; 高、低压段的启动压力由实验压

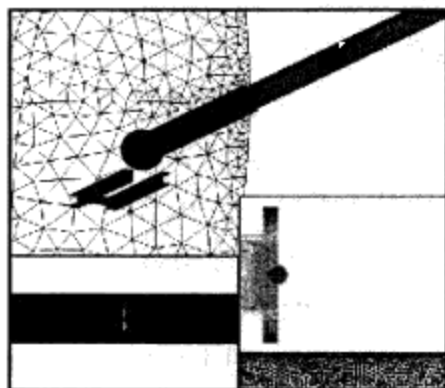


图 7.22 计算网格

力给定。计算过程中根据乒乓球周围流场分布求出气动载荷，由弹道方程求解下一时刻乒乓球的位置；网格运动采用第五章的非结构动网格技术实现，运动过程经历了四次网格重构，网格重构后信息传递采用第六章的“移动网格信息传递方法”实现。

图 7.23 给出位于乒乓球表面观测点位置及观测点的压力变化曲线。激波到达观测点位置均有压力峰值，迎风面（观测点 1）发生正反射，峰值最高，持续时间长，侧面（观测点 2、3、4）在激波后是剧烈膨胀，背风面（观测点 5）存在激波汇聚，也有较高压力峰。由于激波运动速度很快，球迎风面与背风面的压力时序仅存在微小差异，但压力阈值差异显著。侧面的三个观测点的压力变化基本一致，说明非结构网格模拟平面激波出现的非平面误差较小。

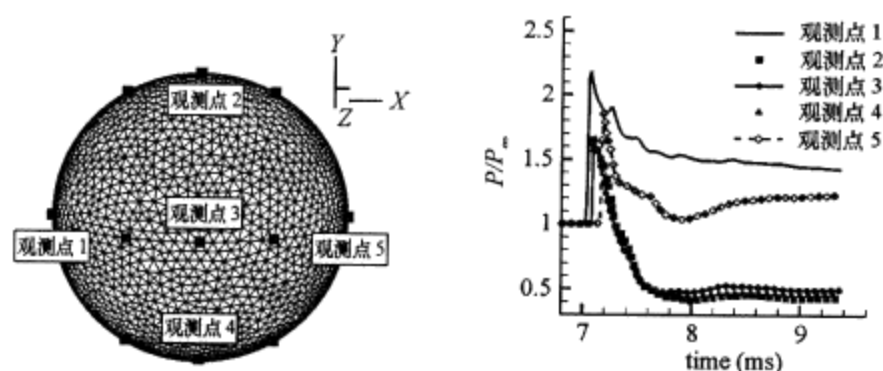


图 7.23 球面观测点位置及压力

计算过程中时间推进了 30 多万步，通过对流场参数云图、流线等分析，激波及其后高动能气流作用在乒乓球上，在球迎风面形成高压区域，气流绕过球体压力最低，在背风面压力有所恢复，但是一直低于迎风面高压。乒乓球在气流压差的作用下迅速后移，移动速度增大很快，至 6ms 乒乓球已经离激波管出口较远了。由于采用激波管敞口实验方式，激波离开管口后迅速衰减，6ms 时出口气体压力已经接近环境压力，其后乒乓球主要是惯性运动，因此，采用 6ms 之前的有效图像进行比对，大约得到 10 多幅图像。

通过激波运动速度进行时间标定，以激波到达乒乓球时刻为 0 时刻，采用 Canny 图像处理得到乒乓球轮廓线和计算得到的模型位置。图 7.24 给出了  $t = 1.667\text{ms}$  实验与计算结果的比对。图中由左至右为清晰化处理后的实验照片（左上）；采用 Canny 图像处理得到乒乓球轮廓线（左下）；照片轮廓线换算成有量纲长度与计算得到的乒乓球边界的比较（中）；该时刻流场等压力

云图及无量纲压力范围(右)。

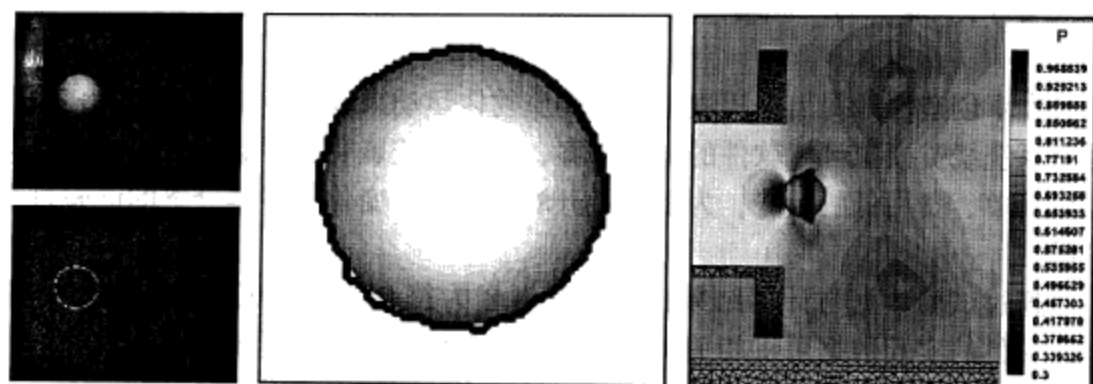


图 7.24  $t = 1.667\text{ms}$  实验与计算结果的比较

部分典型时刻的乒乓球轮廓比较如图 7.25, 在 3ms 之前二者符合较好, 表明在气动力为主要作用力的时候, 采用试验图像来验证计算结果是可行的。在 3ms 之后逐步出现差异, 但是差异的规律性不明显, 例如, 4.0ms 和 4.667ms 两个时刻, 后者又比前者符合较好, 除了图像处理精度外, 原因可能是乒乓球发生了转动, 两个半球结合处的光线有影响。从 3ms 到 6ms 的试验图像位置总的趋势比计算下移, 主要是由于激波管口外环境不对称引起的, 曾采用不考虑两条平行导轨及其连接件的模型进行模拟, 偏差更为明显。总体看来, 采用激波诱导轻质物体运动来验证超声速流动中多体动力学系统绕流模拟计算机软件方案可行, 通过本节的方案实施, 表明具有操作简单、费用低、有效信息较丰富的优势, 通过试验数据与计算结果比对, 二者较为符合, 证明试验具有较好的精度。

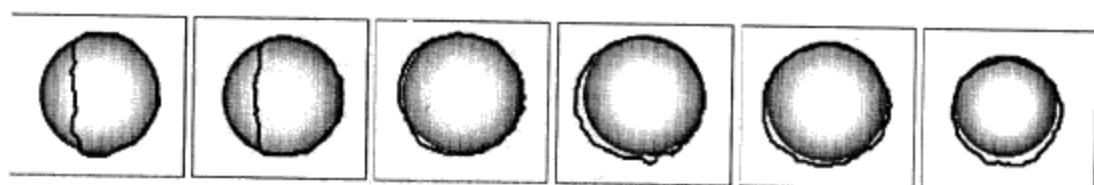


图 7.25 不同时刻试验图像轮廓和计算乒乓球位置比较

依次为:  $t = 0, 0.667, 3.0, 4.0, 4.667, 6.0\text{ms}$

### § 7.3.4 小 结

本章创造性地提出采用激波诱导轻质物体运动来验证超声速流动中多体动力学系统绕流模拟计算软件的试验方案,具体实施表明这一验证试验方案具有操作简单、费用低的优势,为下一步开展考虑姿态变化、多体分离的试验打下基础。

通过试验数据与计算结果比对,二者较为符合,证明试验具有较好的精度,提供的实验数据可供相关研究人员用于多体动力学计算软件的精度评估。

## 第八章 结构动力学相关基础理论

飞行器承受载荷的部件或整体称为结构。根据作用于结构上的载荷是否随时间变化又分为静载荷和动载荷，结构在动载荷作用下会发生变形和振动，称为结构响应。结构动力学就是研究结构在动载荷作用下响应规律的科学。

根据结构、响应和载荷三者之间的关系，结构动力学分为三个问题：

- (1) 已知结构和载荷求响应，称为响应预估；
- (2) 已知载荷和响应进行结构建模或确定模型参数，称为系统辨识；
- (3) 已知结构和响应来估算载荷，称为载荷辨识；

应用中经常把第一个问题称为正问题，后两个问题又称为反问题。在流固耦合研究中关心流体载荷对固体的影响，大多属于正问题。

结构的响应可以是变形，包括弹性变形、塑性变形和破坏，但是大部分情况下表现为振动，即在平衡位置附近往复运动。结构振动分类方法有多种，从描述运动特性的方程的数学特性，分为采用常微分方程或方程组形式的有限自由度振动，和采用偏微分方程或方程组形式的连续弹性体振动。工程实际中的结构大多是连续弹性体，但是在应用计算机作为研究手段进行分析中，需要对连续的时间和空间进行离散处理，即采用有限自由度模型近似连续弹性体模型。

根据描述有限自由度振动的常微分方程进一步又分为线性和非线性振动，下面介绍结构有限自由度线性振动基础理论。

### § 8.1 有限自由度线性振动理论

确定机械系统几何位置的独立参数的个数称为自由度。只有一个参数的单自由度线性系统，是最简单的振动系统，但它是研究更为复杂的多自由度振动系统的基础。连续弹性体可以看作无穷多自由度系统。

### § 8.1.1 单自由度线性系统

单自由度系统的常微分方程通用形式为：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (8.1)$$

它可以描述最典型的实际工程应用问题是质量为  $m$  的质点、刚度为  $k$ 、阻尼为  $c$  和激励力为  $f(t)$  的弹簧振子模型。弹簧振子在  $f(t)$  作用下位移  $x$ ，弹簧产生弹性力  $-kx$ ，同时还有运动速度  $u = \frac{dx}{dt}$  引起的阻尼力  $-cu$ ，根据牛顿第二定律，这些力的合力导致质点产生加速度  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ 。

初始扰动离开平衡位置以后，撤去激励力  $f(t) = 0$ ，依靠弹性力  $-kx$  恢复到平衡位置形成的振动称为自由振动。如果没有阻尼  $c = 0$ ，称为无阻尼自由振动，是永不休止的周期运动，其运动方程：

$$ma + kx = 0 \quad (8.2)$$

这个二阶齐次线性常微分方程的通解为：

$$x = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t \quad (8.3)$$

其中角频率  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  仅与系统本身参数有关，称为固有频率或自然频率 (natural frequency)。有时还用到频率  $f_n = 2\pi/\omega_n$  和周期  $T_n = \omega_n/2\pi = 1/f_n$  的概念。如果已知初始时刻  $t = 0$  的位置  $x(0) = x_0$  和速度  $u(0) = u_0$ ，可以确定通解中的常数，进一步可以化成如下形式：

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (8.4)$$

其中振幅  $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega_n}\right)^2}$  和相位角  $\varphi = \frac{\omega_n x_0}{u_0}$ 。

有阻尼自由振动的方程：

$$ma + cu + kx = 0 \quad (8.5)$$

根据这个二阶齐次线性常微分方程的特征值：

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2} \quad (8.6)$$

分为三种情况：

(1)  $\frac{c}{2m} > \omega_n$  称为过阻尼，方程通解为： $x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ 。

(2)  $\frac{c}{2m} = \omega_n$  称为临界阻尼, 方程通解为:  $x = (A_1 + A_2 t)e^{-\lambda_1 t}$

(3)  $\frac{c}{2m} < \omega_n$  称为欠阻尼, 方程通解:  $x = e^{-\frac{c}{2m}t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$ 。给定初始位置和速度, 可以化为:

$$x = A e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (8.7)$$

其中振幅  $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{u_0 + \frac{c}{2m}x_0}{\omega_d}\right)^2}$  和相位角  $\varphi = \arctan \frac{\omega_d x_0}{u_0 + \frac{c}{2m}x_0}$ 。这种情况不

是严格的周期运动, 是一个振幅按照指数规律衰减的准周期运动, 阻尼降低了系统的固有频率, 把  $\omega_d = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$  称为有阻尼固有频率 (damping natural frequency), 往复一次需要时间为  $T_d = \omega_d / 2\pi$ 。

包含有振动分析的工程问题中, 过阻尼不会发生多次往复运动, 系统参数正好满足临界阻尼条件的情况也很少, 因此大多关心是欠阻尼工况。下面介绍中没有特别说明, 就认为是发生欠阻尼振动的系统。

存在外界干扰力  $f(t) \neq 0$  作用的振动是受迫振动。根据激励力函数形式分为简谐激振、周期激振、脉冲激振、阶跃激振和任意激振, 其中, 分析简谐激振的理论模型是分析其他激振形式的基础, 称其为最基本的受迫振动, 其运动方程:

$$ma + cu + kx = F_0 \sin \omega_f t \quad (8.8)$$

式中激励力振幅为  $F_0$ 、角频率  $\omega_f$ 。

根据常微分方程理论, 非齐次方程的解为通解和特解两部分, 方程通解就是前面的齐次方程的通解:  $x_1 = e^{-\frac{c}{2m}t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$ , 方程特解形式为:

$$x_2 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}} \sin(\omega_f t - \alpha) = A \sin(\omega_f t - \alpha) \quad (8.9)$$

式中  $\alpha = \arctan \frac{c\omega_f}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)}$ 。

如果已知初始时刻  $t=0$  的位置  $x(0) = x_0$  和速度  $u(0) = u_0$ , 方程 (8.8) 的解:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{u_0 + \frac{c}{2m}x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + A e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ \sin \alpha \cos(\omega_d t) + \frac{\frac{c}{2m} \sin \alpha - \omega_f \cos \alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \\
& + A \sin(\omega_f t - \alpha)
\end{aligned} \quad (8.10)$$

根据上式可以看出, 简谐激振力产生的位移由三部分组成, 第一项与激振力无关, 完全由系统初始条件决定, 称为零输入响应; 第二项与第三项合称为零初始响应, 第三项称为稳态响应。前面两部分按照自由振动频率运动, 阻尼会导致其运动振幅逐步衰减, 因此仅在振动开始一段时间有影响, 达到最后稳定状态就只有按照激振力振动频率的运动。

为便于分析, 引入频率比:  $\bar{\omega} = \omega_f / \omega_n$ 、阻尼比  $\zeta = c / (2m\omega_n)$  和静变形:  $x_s = F_0 / k$ 。作用在单自由度系统上简谐激振力  $F_0 \sin \omega_f t$  引起的位移最大振幅不等于力  $F_0$  引起的静变形, 定义如下无量纲参数:

$$\beta = \frac{A}{x_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\zeta\bar{\omega})^2}} \quad (8.11)$$

称为动力放大系数。从上式可以看出, 当频率比  $\bar{\omega} \rightarrow 1$  时动力放大系数迅速增大, 形成共振现象 (resonance)。在共振频率  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  附近, 阻尼对振幅影响最大, 如果无阻尼  $\zeta = 0$ , 系统将发生崩溃  $\beta \rightarrow \infty$ 。阻尼对相位角也有影响:

$$\alpha = \arctan \frac{2\zeta\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} \quad (8.12)$$

阻尼使得位移响应总是滞后于激振力, 但是在共振频率时, 无论阻尼多少, 相位角为常数  $\alpha = \pi/2$ , 应用中经常利用这一特性来测量系统固有频率。

根据线性系统的叠加原理, 对于周期激振的激振力可以表示为  $f(t + T) = f(t)$ , 常采用 Fourier 级数转化为一列简谐激振力:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t) \quad (8.13)$$

式中基频  $\omega = 2\pi/T$ 。总的响应等于每个简谐激振力产生的响应之和。

时刻  $t = 0$  作用单位脉冲的运动方程:

$$ma + cu + kx = \delta(t) \quad (8.14)$$

当脉冲作用完成以后, 系统表现为欠阻尼自由振动:  $x = A e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ 。在脉冲作用瞬间  $t = 0 \rightarrow 0^+$ , 加速度:  $a = \delta(t)/m$ , 积分以后得到速度和位移:

$$u_0 = \int_0^{0^+} \frac{\delta(t)}{m} dt = \frac{1}{m} \quad \text{和} \quad u_0 = \int_0^{0^+} \frac{1}{m} dt = 0$$

得到单位脉冲的响应函数:

$$x = \frac{1}{m\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin[(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t] \quad (8.15)$$

单位脉冲响应函数在振动理论中有很重要的应用,它较全面地反映了系统的动力特性,还是研究复杂激振力的基础,例如,在数值计算任意激振力的响应时,其中就有分解为有限数目的脉冲来近似的方法。

时刻  $t=0$  作用单位阶跃激励力:

$$f(t) \triangleq U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

根据微分方程理论,得到运动方程通解:

$$x = \frac{1}{k} + A e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

如果已知初始时刻  $t=0$  的系统处于静止  $x(0)=0$  和  $\dot{x}(0)=0$ , 则有响应:

$$x = \frac{1}{k} \left[ 1 - e^{-\frac{c}{2m}t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{c}{2m\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right] \quad (8.16)$$

在  $\zeta=0$  条件下可以得到无阻尼的阶跃响应函数:

$$x = \frac{1}{k} [1 - \cos(\omega_d t)] \quad (8.17)$$

单位阶跃响应函数在振动理论分析中也有很多应用。例如,初始时刻处于静止状态的系统受到时间宽度为  $\Delta t$ 、大小为  $F_0$  的矩形激励力:

$$f(t) = F_0 [U(t) - U(t - \Delta t)]$$

无阻尼时系统的响应函数:

$$x = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_d t)] & 0 < t < \Delta t \\ \frac{F_0}{k} \{ \cos[\omega_d(t - \Delta t)] - \cos(\omega_d t) \} & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (8.18)$$

对于冲击响应问题,经常关心最大位移和到达时间。对上式求导为速度表达式:

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{\omega_d F_0}{k} \sin(\omega_d t) & 0 < t < \Delta t \\ \frac{\omega_d F_0}{k} \{ \sin(\omega_d t) - \sin[\omega_d(t - \Delta t)] \} & t \geq \Delta t \end{cases} \quad (8.19)$$

最大位移时  $\dot{x} = 0$ 。根据以上第一式得到最大位移  $x_p$  及其到达时间  $t_p$ :

$$x_p = 2x_s \quad \text{和} \quad t_p = \frac{T_n}{2} \leq \Delta t$$

根据以上第二式, 得到最大位移  $x_p$  及其到达时间  $t_p$ :

$$x_p = 2x_s \sin\left(\frac{\pi\Delta t}{T_n}\right) \quad \text{和} \quad t_p = \frac{T_n}{4} + \frac{\Delta t}{2} > \Delta t$$

可以知道, 如果矩形激励力的时间宽度大于系统固有周期的一半  $\Delta t \geq T_n/2$ , 响应的峰值发生在激励力作用时间内, 最大响应为静位移的两倍; 如果矩形激励力时间宽度较短  $\Delta t < T_n/2$ , 最大响应发生在激励力作用以后, 响应峰值及其到达时间与时间比值  $\Delta t/T_n$  相关。

工程上把动力放大系数随无量纲参数  $\Delta t/T_n$  的变化曲线称为响应谱。

### § 8.1.2 多自由度线性系统

$n$  自由度系统的常微分方程通用形式为:

$$[M]\ddot{\mathbf{a}} + [C]\dot{\mathbf{u}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (8.20)$$

其中, 质量矩阵  $[M] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、矩阵阻尼  $[C] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和刚度矩阵  $[K] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。如果矩阵  $[M]$  有不为零的非对角线元素, 称为惯性耦合或动态耦合, 矩阵  $[K]$  不是对角矩阵, 称为刚度耦合或静态耦合。

首先分析最为简单的两自由度无阻尼自由振动。根据常微分方程理论, 系统的固有频率采用如下线性方程得到:

$$[M] \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{pmatrix} = [K] \quad \omega_1 < \omega_2$$

两个固有频率均为实数, 对应于  $\omega_1$  的振动称为第一主振动, 它的解为:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ x_2 = A_1' \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases}$$

上式中振幅比值  $\gamma_1 = A_1'/A_1$  是一个仅与系统参数相关的确定值, 带入线性方程可以证明  $\gamma_1 > 0$ ; 同样可以写出对应于  $\omega_2$  的第二主振动的解, 振幅比值  $\gamma_2 = A_2'/A_2 < 0$ 。两自由度无阻尼自由振动的统一解为:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2 = A_1 \gamma_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \gamma_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (8.21)$$

其中振幅  $A_1$ 、 $A_2$  和相位角  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  由初始条件确定。系统振动有两个谐振合成, 在频率比值为有理数时为周期振动。

由于系统的振幅比值在振动过程中不变化, 所以固有频率对应的振动形状也固定不变。根据上式可以看出, 如果系统仅有第一主振动, 系统两个位移变量是频率  $\omega_1$ 、振幅  $A_1$  和  $A_1 \gamma_1$  同相位的振动, 这时振动形状称为第一主振型或第一主模态 (principle model shape); 如果系统仅有第二主振动, 是频率  $\omega_2$ 、振幅  $A_1$  和  $A_1 \gamma_1$  反相位的振动, 系统两个位移变量正负反号, 振动形状称为第二主振型或第二主模态。

分析多自由度无阻尼自由振动的过程和以上两自由度振动相似, 只是涉及很多线性代数的知识, 下面简单介绍。

系统固有频率采用如下线性方程得到:

$$[M](\omega^2) = [K] \quad \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$$

固有频率均为实数, 对应于  $\omega_i$  的解为:

$$x = \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$$

同样根据齐次线性方程特点, 广义位移  $n$  个振幅  $a_i$  中可以任意选择一个作为参考求出的比值保持不变, 不妨设  $a_{1i} = 1$ , 那么  $\varphi_i = (1, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$ , 称为第  $i$  阶主振型或主模态。将各阶主振型写成矩阵形式:

$$[\Phi] = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$$

称为模态矩阵 (model matrix)。

实际上  $\varphi_i$  就是特征值  $\omega_i$  对应的特征向量, 即  $\omega_i^2 [M] \varphi_i = [K] \varphi_i$ , 根据线性代数理论可以推出主振型关于质量矩阵和刚度矩阵都有正交性:

$$\varphi_j^T [M] \varphi_i = 0 \quad \text{和} \quad \varphi_j^T [K] \varphi_i = 0$$

模态矩阵  $[\Phi]$  是特征矩阵, 引入模态坐标 (model coordinate) 进行线性变换:

$$x = [\Phi] \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$$

代入多自由度无阻尼自由振动方程:

$$[M][\Phi] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + [K][\Phi] \xi = 0 \quad (8.22)$$

利用主振型的正交性可以得到解耦的振动方程:

$$\bar{m}_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + \bar{k}_i \xi_i = 0 \quad (8.23)$$

式中  $\bar{m}_i = \varphi_i^T [M] \varphi_i$  称为第  $i$  阶模态质量 (model mass),  $\bar{k}_i = \varphi_i^T [K] \varphi_i$  称为第  $i$  阶模态刚度 (model stiffness)。特征值  $\omega_i = \sqrt{\bar{k}_i / \bar{m}_i}$  在线性变换中保持不变。

采用模态质量把特征向量  $\varphi_i$  化为正则模态 (normal model):  $\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{\bar{m}_i}} \varphi_i$ ,

对应正则模态坐标和正则模态矩阵:  $\mathbf{x} = [\bar{\Phi}] \bar{\xi} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i \bar{\varphi}_i$ , 上式写为:

$$\frac{d^2 \bar{\xi}_i}{dt^2} + \omega_i^2 \bar{\xi}_i = 0 \quad (8.24)$$

按照上一节单自由度振动处理, 得到关于模态坐标的解, 求出通解形式:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (8.25)$$

在  $\varphi_i$  中只有一个元素待定, 其他元素根据比例关系得到, 还有  $\alpha_i$ , 利用初始条件  $\mathbf{x}(0)$  和  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  来确定这  $2n$  个未知数。

对于考虑阻尼、激振力的多自由度系统 (8.20) 式, 在比例阻尼 (proportional damping) 情况下, 即阻尼矩阵可以写成质量矩阵和刚度矩阵的线性组合:

$$[C] = c_1 [M] + c_2 [K]$$

也可以采用以上振型叠加法或模态叠加法。引入模态坐标:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \frac{d\xi}{dt} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \xi = [\Phi]^T f(t) \quad (8.26)$$

线性变换为解耦的振动方程:

$$\bar{m}_i \frac{d^2 \bar{\xi}_i}{dt^2} + \bar{c}_i \frac{d\bar{\xi}_i}{dt} + \bar{k}_i \bar{\xi}_i = \bar{f}_i(t) \quad (8.25)$$

## § 8.2 振动方程的数值解法

以上分析中常微分方程是线性的, 可以找到解析形式表示的精确解。实际工程应用中遇到的复杂结构模型很少如此理想, 在自由度达到成百上千, 甚至几十万的情况下, 很难消除质量耦合、刚度耦合和阻尼耦合等非线性特征; 另外, 对于爆炸冲击、地震激励等激励力变化规律复杂的情况, 也很难写出解析解, 这时必须借助电子计算机来进行数值求解其近似值。结构动力学分析建模以后的计算内容主要包括两方面, 首先是计算系统固有频率和固有振型, 多数情况变为大型稀疏矩阵的特征值、特征向量求解问题, 第二方面就是通过对振动方程进行数值积分得到动力学系统响应的近似值。第一方面完全是固体力学

研究的内容,流固耦合研究中主要关心流体载荷作用下的响应,下面简单引述这方面常用的计算方法。

运动方程的数值解法很多,一般分为两大类:激振力插值法和运动插值法。

### § 8.2.1 力插值法

激振力插值法的基本原理是假设时间间隔  $\Delta t$  内激振力不变化(称为分段常数插值)或者线性变化(称为分段线性插值),这样用阶梯函数或连续折线近似原来的激振力曲线。下面介绍采用分段常数插值方法计算单自由度系统,对于多自由度系统只需把求解变量变为向量,计算过程完全一致。

首先,把激励力作用时间分为  $n = T/\Delta t$  等分,在  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  间隔内,用平均力代替原来激励力的分布函数  $f(t)$ :  $\bar{f}^n = [f(t^{n+1}) + f(t^n)]/2$ 。根据前面介绍的理论,对于单自由度无阻尼线性系统:  $ma + kx = f(t)$ , 如果系统在  $t^n$  时刻的状态  $x^n$  和速度  $u^n$  已知,阶跃力  $\bar{f}^n$  作用下  $\Delta t$  内任意时刻  $\tau$  的运动响应和速度为:

$$x(\tau) = x^n \cos(\omega_n \tau) + \frac{u^n}{\omega_n} \sin(\omega_n \tau) + \frac{\bar{f}^n}{k} \{1 - \cos(\omega_n \tau)\} \quad (8.26)$$

如果取  $\tau = t^{n+1}$  得到下一时刻的状态和速度:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n \cos(\omega_n \Delta t) + \frac{u^n}{\omega_n} \sin(\omega_n \Delta t) + \frac{\bar{f}^n}{k} \{1 - \cos(\omega_n \Delta t)\} \\ \frac{u^{n+1}}{\omega_n} &= -x^n \sin(\omega_n \Delta t) + \frac{u^n}{\omega_n} \cos(\omega_n \Delta t) + \frac{\bar{f}^n}{k} \sin(\omega_n \Delta t) \end{aligned} \quad (8.27)$$

依此类推,从初始时刻  $t^0$  已知计算到最后时刻。

尽管这种方法编程简单,但是显式格式的稳定性要求时间推进步长取得很小,计算效率较低;其次,由于以上递推公式是根据线性系统建立的,应用受到很大限制。

### § 8.2.2 运动插值法

运动插值法又称为直接积分法和逐步积分法,其基本假设是在时间间隔  $\Delta t$  内加速度、速度和位移按照已知规律变化,直接对运动方程进行数值积分,不需要计算固有频率和振型。采用分段线性化处理,可以把这种方法推广到有阻

尼的非线性系统,因此在工程中应用广泛。下面简单介绍常用的有纽马克算法(The Newmark Method)和威尔逊- $\theta$ 算法(The Wilson- $\theta$  Method)。

### 1. 纽马克法

已知  $t^n$  时刻的运动,在计算  $t^{n+1}$  时刻的速度时,引入一个参数  $\gamma \in [0, 1]$ , 假设  $\Delta t$  内加速度  $a$  为常数:  $a = a^n + \gamma(a^{n+1} - a^n)$ , 这样得到  $t^{n+1}$  时刻速度:

$$u^{n+1} = u^n + (1 - \gamma)a^n \Delta t + \gamma a^{n+1} \Delta t \quad (8.28)$$

在计算  $t^{n+1}$  时刻的位移时,引入另一个参数  $\delta \in [0, 0.5]$ , 假设  $\Delta t$  内加速度  $a$  为常数:  $a = a^n + 2\delta(a^{n+1} - a^n)$ , 得到位移:

$$x^{n+1} = x^n + u^n \Delta t + (0.5 - \delta)a^n (\Delta t)^2 + \delta a^{n+1} (\Delta t)^2 \quad (8.29)$$

同时,  $t^{n+1}$  时刻的加速度、速度和位移还要受到运动方程约束:

$$[M]a^{n+1} + [C]u^{n+1} + [K]x^{n+1} = f^{n+1} \quad (8.30)$$

如果  $t^n$  时刻运动变量已知,在系统刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵、激励力、两个参数给定以后,利用以上三个线性方程解得三个未知数:  $x^{n+1}$ 、 $u^{n+1}$  和  $a^{n+1}$ 。具体做法是把(8.29)式写成加速度表达式、(8.28)式写成速度表达式,代入(8.30)式,得到位移方程:

$$[\bar{K}]x^{n+1} = \bar{F}^{n+1} \quad (8.31)$$

其中等效刚度矩阵与时间无关:

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{1}{\delta(\Delta t)^2}[M] + \frac{\gamma}{\delta\Delta t}[C]$$

等效载荷:

$$\begin{aligned} [\bar{F}^{n+1}] = f^{n+1} + [M] & \left( \frac{1}{\delta(\Delta t)^2}x^n + \frac{1}{\delta\Delta t}u^n + \frac{1}{2\delta}a^n - a^n \right) \\ & + [C] \left( \frac{\gamma}{\delta\Delta t}x^n + \frac{\gamma}{\delta}u^n + \frac{\gamma\Delta t}{2\delta}a^n - u^n - a^n\Delta t \right) \end{aligned}$$

对于广义位移向量,以上线性代数方程组有多种解法,这里不再赘述。得到  $t^{n+1}$  时刻的位移,代入(8.29)式计算  $t^{n+1}$  时刻的加速度,代入(8.28)式计算  $t^{n+1}$  时刻的速度,依此类推,可以得到各时刻的响应向量。

可以证明,纽马克算法在  $\gamma \geq 0.5$ ,  $\delta \geq 0.25(1 + \gamma)^2$  时无条件稳定。早期计算采用的平均加速度法本质上就是纽马克算法中参数  $\gamma = 0.5$ ,  $\delta = 0.25$  的特例。

### 2. 威尔逊- $\theta$ 算法

威尔逊算法的特别之处在于构造  $t^{n+1}$  时刻运动变量的计算方法时采用系统  $t^n + \theta\Delta t$  时刻的变量表示,这里引入的常数  $\theta \geq 1$ ,意味着是  $t^{n+1}$  时刻以后的信

息。

首先假设时间范围  $\tau \in [t^n, t^n + \theta\Delta t]$  内加速度  $a$  线性变化:

$$a(\tau) = a^n + \frac{\tau}{\theta\Delta t} [a(t^n + \theta\Delta t) - a^n] \quad (8.32)$$

积分可得到  $\tau$  时刻速度和位移:

$$u(\tau) = u^n + a^n\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} [a(t^n + \theta\Delta t) - a^n] \quad (8.33)$$

$$x(\tau) = x^n + u^n\tau + \frac{\tau^2}{2} a^n + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} [a(t^n + \theta\Delta t) - a^n] \quad (8.34)$$

进一步假设载荷变化满足:

$$\bar{f}(\tau) = f^n + \theta[f^{n+1} - f^n]$$

得到在  $\tau$  时刻的振动方程:

$$[M]a(\tau) + [C]u(\tau) + [K]x(\tau) = \bar{f}(\tau) \quad (8.35)$$

利用以上关系得到位移方程:

$$[\bar{K}]x(\tau) = \bar{F} \quad (8.36)$$

其中等效刚度矩阵与时间无关:

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} [C]$$

等效载荷:

$$\begin{aligned} [\bar{F}] = & f^n + \theta[f^{n+1} - f^n] + [M] \left( \frac{6x^n}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{6u^n}{\theta\Delta t} + 2a^n \right) \\ & + [C] \left( \frac{3x^n}{\theta\Delta t} + 2u^n + \frac{\theta\Delta t}{2} a^n \right) \end{aligned}$$

代入关系式计算  $\tau$  时刻的速度和加速度。令  $\tau = \Delta t$  就得到  $t^{n+1}$  时刻的信息。

威尔逊- $\theta$  在所取参数  $\theta \geq 1.37$  时无条件稳定, 其优化值  $\theta = 1.420\ 815$ , 一般计算中取  $\theta = 1.4$ 。参数  $\theta = 1$  的特例又称为线性加速度法。

### 3. 精细时程积分法

纽马克算法和威尔逊- $\theta$  算法发展比较成熟, 通过适当的参数选取, 在保证数值积分过程稳定性条件下, 时间步长  $\Delta t$  可以比显式格式大一些, 因此计算效率较高。但是, 若时间步长  $\Delta t$  选得较大, 一些振动的分量不能正确地反映出来; 特别是应用于一个保守系时, 经过若干步计算后, 系统的能量不能保持守恒。这种情况称为“人工阻尼”或“算法阻尼”。为克服这些缺点, 大连理工大学的钟万勰院士提出了精细时程积分法, 并经过许多学者的完善。

$n$  自由度系统的振动方程可以化为如下方程组形式:

$$\frac{dX}{dt} = [H]U + [F] \quad (8.37)$$

这里  $X = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ ,  $[H] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$ ,  $F = \begin{bmatrix} 0 \\ -[M]^{-1}f(t) \end{bmatrix}$ 。

根据线性系统理论, 对于系统矩阵  $[H]$  为常数的静态系统, 如果已知初始状态  $X(t_0)$ ,  $t > t_0$  以后的状态可以通过状态转移矩阵来确定:

$$X(t) = \Phi(t - t_0) \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \cdot [F(\tau)] d\tau \quad (8.38)$$

其中矩阵  $\Phi(t) = e^{[H]t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [H]^k \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 如果没有激励力  $[F(t)] = 0$ , 则有:  $X(t) = \Phi(t - t_0) \cdot X(t_0)$ , 从数学形式来看, 任意时刻  $t$  的系统状态可以看做是通过矩阵  $\Phi$  从初始状态  $X(t_0)$  变换过来的, 故称矩阵  $\Phi$  为系统的状态转移矩阵。

根据上式可以看出系统状态由两部分线性叠加组成: 第一部分为系统初始状态转移项, 第二部分是激励力作用下的强迫运动项。要想得到任意时刻系统运动变量, 必须确定转移矩阵  $\Phi$ , 精细时程积分法主要通过精细计算  $\Phi$  来提高精度。

把时间推进步长进一步细分  $\Delta\tau = \Delta t/m$ , 转移矩阵写为:

$$\Phi(t) = e^{[H]\Delta t} = (e^{[H]\frac{\Delta t}{m}})^m = (e^{[H]\Delta\tau})^{2N}$$

根据转移矩阵定义:

$$\begin{aligned} e^{[H]\Delta\tau} &= I + [H]\Delta\tau + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} [H]^2 + \frac{(\Delta\tau)^3}{3!} [H]^3 + \frac{(\Delta\tau)^4}{4!} [H]^4 + \dots \\ &\approx I + G_0 \end{aligned}$$

其中  $G_0$  为无穷矩阵级数前面的有限项。如果采用如下递推关系:

$$G_i = 2G_{i-1} + G_{i-1}^2$$

那么转移矩阵可以表示为:

$$\Phi(t) = [I + G_0]^{2N} = [I + G_1]^{2(N-1)} = \dots = [I + G_{N-1}]^2 = I + G_N$$

以上计算过程中只有  $G_0$  近似引入误差, 通过时间步长的细分使得误差量变得很小。假如  $G_0$  仅包括前四项的情况, 略去的高阶小量为  $(\Delta\tau)^5$  量级, 如果取  $m=6$ , 那么相对于系统时间推进步长  $\Delta t$  的误差量级为  $(\Delta t)^{30}$ , 接近于计算机的舍入误差, 可以看作精确解。

精细时程积分方法的缺点是矩阵运算多, 计算效率较低, 因此人们在使用

分段的精细时程积分法时, 尽量每步采用相同的时间步长, 这样只要在第一次计算出, 以后每步都可以使用, 因此在以后的每个时间步长只要计算出特解就可以了, 这样就可以大大提高计算效率。

### § 8.3 连续弹性体振动理论

动力学系统按其不同的数学描述方法而划分为集中参数系统和分布参数系统两大类。当系统的状态参数仅是时间的函数时, 描述系统特性的状态方程组为常微分方程组, 系统称为集中参数系统; 当系统的状态参数是时间和空间的函数时, 描述系统特性的状态方程为偏微分方程组, 系统称为分布参数系统。两类系统因数学描述方法不同, 其数学处理方法和所用数学工具也不同。

对于内部质量、温度、应力等物理量连续分布的物质, 连续介质力学中根据质量守恒定律、动量守恒定律以及热力学定律, 建立了描述物体运动和变形的基本方程。对于各向同性的连续体微团, 在应力作用下运动方程满足 Newton 第二定律:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f}_m + \nabla [\pi] \quad (8.39)$$

其中  $\mathbf{f}_m$  是单位体积的质量力,  $[\pi]$  是应力张量。为了使以上方程能够求解, 需要给出描述连续体应力和应变之间的关系, 即所谓材料力学性质的本构关系。

前面第二章实际上采用了应力表示为静压力和变形速度梯度张量的线性齐次函数的 Newton 流体和 Stokes 假设, 才能得到如下本构关系:

$$\begin{cases} \nabla [\pi] = -p\mathbf{I} + \mu [\tau] \\ \pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \end{cases} \quad (8.40)$$

具有弹性的结构在外力作用下的振动的理论基础是弹性力学, 对于均匀、连续、各向同性的弹性体, 假设应力和应变之间的关系是线性的, 即服从胡克定律, 或者称为线性弹性, 正应变仅与正应力有关:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\pi_{xx} - \sigma(\pi_{yy} + \pi_{zz})}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\pi_{yy} - \sigma(\pi_{xx} + \pi_{zz})}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{\pi_{zz} - \sigma(\pi_{xx} + \pi_{yy})}{E} \end{aligned}$$

剪切应变仅与切向应力有关:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\pi_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\pi_{zx}}{G}$$

式中  $E$  为体弹性模量,  $G$  为体弹性模量,  $\sigma$  为泊松比, 三者之间存在如下关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

在连续弹性体振动问题研究中, 认为围绕平衡位置附近发生的振动与物体本身尺度相比非常微小, 物体的变形不会引起连续体微团之间相对运动, 因此, 采用随体导数, 把运动方程从 Lagrange 坐标系变换到 Euler 坐标系过程中, 与对流速度相关的第二项可以忽略, 不考虑体积力情况下, 采用围绕平衡位置的位移矢量记为  $X_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ , 加速度写为  $a = \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2}$ , 正应变写为  $\varepsilon =$

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \text{ 剪切应变写为 } \gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}。$$

建立的偏微分方程组仅在少数情况下可以写出解析表达式。

#### (1) 细长直杆纵向自由振动

这种条件下认为只有  $x$  方向的响应和应力, 运动方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (8.41)$$

采用分离变量法, 设解的形式为:  $\xi(x, t) = \Phi(x)T(t)$ , 代入上式, 最后得到通解:

$$\xi(x, t) = \left[ A \sin\left(\frac{\omega}{a}x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{a}x\right) \right] \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.42)$$

式中  $a = \sqrt{E/\rho}$  为纵波在直杆内传播速度, 振动固有频率  $\omega$ 、相位角  $\varphi$ 、振幅  $A$  和  $B$  这四个常数根据边界条件和初始条件来确定。对于长度为  $l$ 、两端固定的直杆, 固有频率  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 振动位移:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (8.43)$$

其中  $A_n$  和  $\varphi_n$  由初始条件的 Fourier 级数确定。

可以看出连续弹性体的振动依然可以表示为各阶振型的叠加, 但是与多自由度系统相比, 其固有频率有无穷多个, 对应的振型也有无穷多个。

## (2) 细长梁的横向自由振动

这种条件下认为只有  $y$  方向的响应和外力, 所有参数不随坐标  $z$  变化, 运动方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} \quad (8.44)$$

对梁的横截面积为  $A$ , 上式积分:

$$\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \int_A \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} dy dz = \frac{d}{dx} \int_A \pi_{xy} dy dz = \frac{dN_x}{dx} \quad (8.45)$$

根据材料力学, 横截面积的剪切力  $N_x$  与当地的截面弯矩  $M_x$  关系:  $N_x = \frac{dM_x}{dx}$ ,

弯矩  $M_x$  与梁的变形曲率之间:  $M_x = -EI_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ , 其中  $I_x$  是与梁的截面形状有关的转动惯量。这样一来, 上式可以写为:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{\rho A} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad (8.46)$$

采用分离变量法, 最后得到通解:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & \left[ A \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}x\right) + C \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}x\right) \right. \\ & \left. + D \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}x\right) \right] \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (8.47)$$

式中  $b = \sqrt{EJ/\rho A}$  为常数, 振动固有频率  $\omega$ 、相位角  $\varphi$ 、振幅  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  这六个常数需要根据边界条件和初始条件来确定。

对于两端简支梁, 在边界处位移和弯矩为 0, 根据频率方程:

$\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}l\right) = 0$ , 求出固有频率:  $\omega_n = b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 得到横向振动位移:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (8.48)$$

其中  $A_n$  和  $\varphi_n$  由初始条件的 Fourier 级数确定。

对于悬臂梁, 根据边界条件得到频率方程:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}l\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}l\right) = -1$$

两端自由梁的频率方程:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}l\right)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega}{b}}l\right)=1$$

可以求出固有频率，代入通解得到横向振动位移，这里不再赘述。

可以看出连续弹性体振动的特点，除了有无穷多个固有频率和振型外，结构的固有频率还与边界条件相关。

## 第九章 多体分离动力学系统的流动模拟

有相对运动的多体分离问题是航空、航天和武器领域需要解决的一类重要力学问题,比如空中发射,大气层内飞行器的抛射,飞机、运载器的抛罩,外挂物投放,火箭的级间分离及子母弹抛撒等,均属于有相对运动的多体分离问题。此类问题往往具有包含的分离体数目多、相对位移大、气动干扰严重等特点,而分离过程能否顺利实现将直接影响分离后的飞行姿态,甚至会影响任务的成败,因此研究多体分离时的流场特性,了解其作用机理和影响规律,对合理设计相关系统,提高多体分离时的可靠性和安全性具有重要意义。

大气层内无动力飞行器的运动规律由惯性力、重力和气动力决定,对于轻质物体的多体分离问题,主要根据气动载荷确定。气动载荷的分布通过流场求解获得,由于流动的非定常性,流场求解时必须考虑物体的运动。这样,物体的运动和流场求解之间必须耦合起来。本章介绍流体力学和飞行动力学的耦合求解方法,并对其在整流罩分离、助推器分离、子母弹抛撒等问题中的应用做简要介绍。最后介绍了用于解决多体分离问题的软件系统。

### § 9.1 流体力学和飞行动力学耦合求解过程简介

对于在地面惯性坐标系中运动的刚体动力学系统,飞行器服从牛顿第二定律和角动量守恒定律,经典力学已证明,刚体运动可分解为刚体质心位移运动和绕质心旋转运动,运动特性可以用六自由度动力学方程组描述。关于六自由度弹道方程的推导此处不再赘述,仅对刚体动力学方程的耦合求解方法进行介绍。

刚体质心的运动方程为:

$$m \frac{dV}{dt} = F \quad (9.1)$$

其中  $m$  为刚体的质量,  $V$  为刚体质心相对于惯性系的速度矢量,  $F$  为作用在刚体上的外力总矢量。可直接得到惯性系下的加速度, 采用 Runge-Kutta 方法求解 (9.1) 式得到刚体质心速度, 并进而求解质心位移:

$$S = Vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (9.2)$$

刚体转动的动力学方程是:

$$\frac{dH}{dt} = M \quad (9.3)$$

其中  $M$  是作用在刚体上的外力对刚体质心的力矩总矢量,  $H$  是刚体对质心的动量矩, 为转动角速度  $\omega$  和惯性矩阵的乘积,  $[I]$  是惯性矩阵, 可表示为:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

转动惯量  $I_{ii} = \int \rho(x_j^2 + x_k^2) d\sigma$ , 惯量积  $I_{ij} = \int \rho x_i x_j d\sigma, i \neq j$ 。

对于不同的工程问题, 经常将上式变化到不同的坐标系, 导出不同的具体表达式。对于飞行试验, 多数遥测传感器固联于飞行器弹体结构框架上, 试验时观测量反映质心运动和过载、绕质心转动的角度和角速率等物理量, 坐标系采用随飞行器一起运动的相对坐标系较为常见, 且习惯上以弹体轴线为基础的体轴系描述; 常规风洞试验是根据相对运动原理, 飞行器模型相对地面不动、气流相对运动的形式来研究实际飞行过程中气流不动、飞行器运动的空气动力学特性, 习惯上采用风轴系。

风洞坐标系通常为惯性坐标系, 自由状态飞行器的体轴系大多是非惯性坐标系, 二者间可以通过姿态角进行相互转换, 如图 9.1 所示, 首先绕  $y$  轴转过一个偏航角  $\Psi$  (头部向右为正), 然后绕  $z$  轴转过一个俯仰角  $\theta$  (抬头为正), 最后绕  $x$  轴转过一个滚转角  $\phi$  (右翼向下为正)。

惯性坐标系和非惯性坐标系之间线性变换关系为:

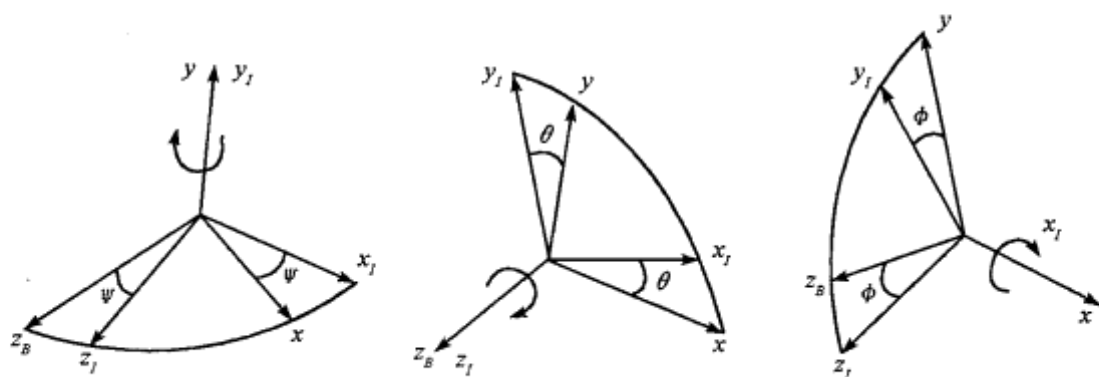


图 9.1 坐标系的基元变换示意图

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = [T] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_I \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_I = [T]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = [T]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B \end{cases} \quad (9.5)$$

其中下标  $B$  表示非惯性坐标系, 下标  $I$  表示惯性坐标系, 变换矩阵  $[T]$  可以写成三个基元变换矩阵的乘积, 即:

$$\begin{aligned} [T] &= [T]_\psi [T]_\theta [T]_\phi \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Psi & 0 & \sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

非惯性体轴坐标系以姿态角速度  $\omega$ , 那么矢量  $f$  在两个坐标系之间通过下式关联:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + \omega \times f \quad (9.6)$$

其中  $\frac{df}{dt}$  是惯性坐标系中的时间导数,  $\frac{\delta f}{\delta t}$  是非惯性坐标系中的时间导数。

根据上式, 在非惯性系下转动的动力学方程表述为:

$$\frac{\delta H}{\delta t} + \omega \times H = M$$

如果惯性矩阵  $[I]$  不随时间变化, 进一步写为:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} = -[\boldsymbol{I}]^{-1}[\boldsymbol{\omega}]^s[\boldsymbol{I}]\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{M} \quad (9.7)$$

其中矩阵  $[\boldsymbol{\omega}]^s$  满足性质:  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{f} = [\boldsymbol{\omega}]^s \boldsymbol{f}$ , 称为矢量  $\boldsymbol{\omega}$  的斜对称矩阵:

$$[\boldsymbol{\omega}]^s = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

采用四步 Runge-Kutta 方法求解方程 (9.7) 得到刚体在非惯性系下的角速度  $\boldsymbol{\omega}$ 。

在得到刚体的角速度后, 根据补充 Euler 运动方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\tan\theta\cos\varphi & -\tan\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi/\cos\theta & -\sin\varphi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

采用 Runge-Kutta 方法求解可以知道新时刻刚体的姿态角。

飞行力学和流体力学耦合求解过程如图 9.2 示意, 包括如下基本步骤:

(1) 求解流动控制方程得到  $n$  时刻流场压力分布, 对刚体表面压力积分得出惯性系下刚体所受的合力及力矩;

(2) 由 (9.1) 式求出  $n+1$  时刻刚体质心惯性系下的加速度;

(3) 在惯性系下, 利用  $n$  时刻质心的加速度积分求出速度, 速度积分得到质心位移;

(4) 将力矩通过坐标变换转换到非惯性系下, 用 Runge-Kutta 方法在非惯性系中积分 (9.7) 式, 得到  $n+1$  时刻刚体的角速度;

(5) 对 Euler 运动方程 (9.8) 式变化率进行时间积分, 得到  $n+1$  时刻刚体的 Euler 角;

(6) 根据刚体质心的位移以及  $n+1$  时刻的 Euler 角, 更新刚体上所有点的坐标, 时间推进一步;

(7) 通过动网格技术实现流场区域网格的运动, 而后进行  $n+1$  时刻的流动方程求解。

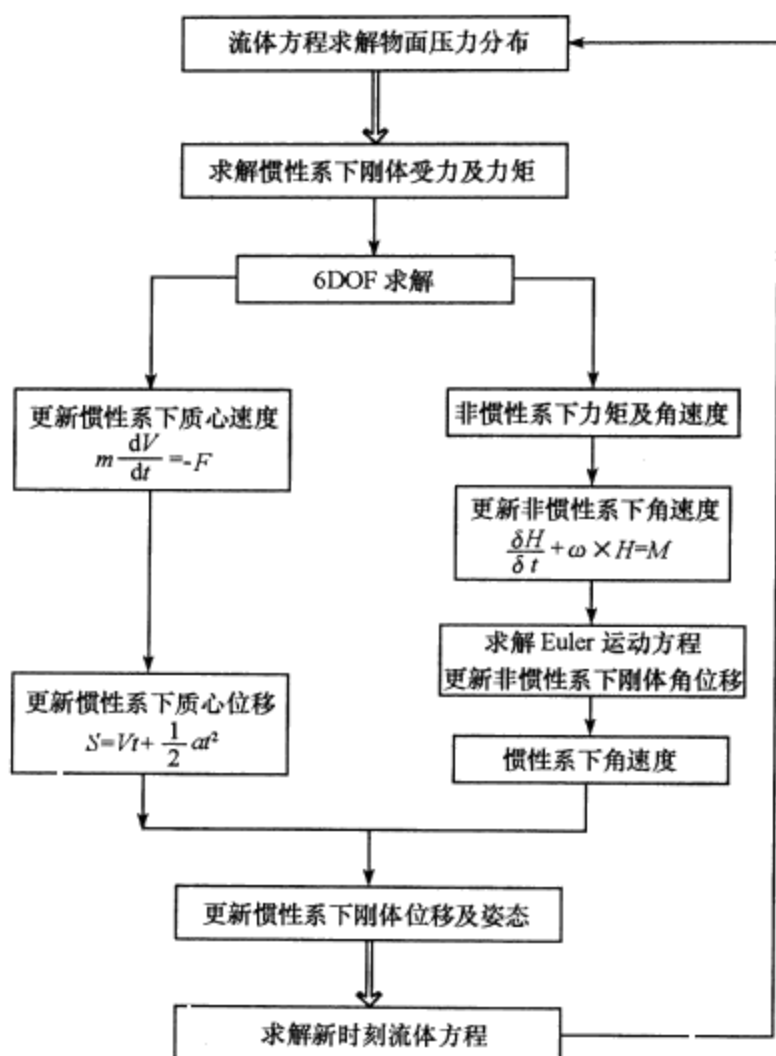


图 9.2 耦合求解方法

## § 9.2 整流罩分离过程数值模拟<sup>[2, 28, 29]</sup>

整流罩开瓣分离方案是预先将整流罩设计为若干瓣，在达到分离点利用机械机构、爆炸装置或其他方式提供的作用力实现安全抛撒。稀薄气体中，飞行器抛罩采用开瓣分离方式很常见，尽管飞行速度很高，但是飞行环境密度很低、动压很小，整流罩分离后运动轨迹和姿态主要受惯性力影响，因此方案设计主要是确定分离初始参数。但是，在稠密大气层内抛罩的受力特性出现不

同,此时飞行速度高、来流动压大,有些情况下气动力比惯性力大几个数量级,不细致研究整流罩分离过程中受到的非定常气动力特性很难完成方案设计。随着冲压发动机技术的发展和子母弹等武器装备的研制,对稠密大气层内整流罩分离过程中非定常流场特性研究的需求越来越迫切。由于实验手段还不完善,有时计算模拟成为分离方案设计、优化选型的主要手段。

国内开展整流罩数值模拟的单位有很多家,本书作者的主要贡献在于通过考察整流罩外形、质心位置、启动干扰等影响因素,提出了“质心后移动态失稳抛罩”方案。这一方案设计思路与其他方案的最大差异是分离过程中整流罩姿态失稳,即合理利用整流罩姿态不稳定提供分离方向需要的气动力。按照这种方案,无论是两瓣还是四瓣壳片构成的整流罩,均可迅速安全分离。

## § 9.2.1 两瓣方案

### § 9.2.1.1 原始设计方案评估

两瓣头罩采用如图 9.3 示意的方式,先用铰链机构将头罩开启至  $30^\circ$  后,利用气动力实现侧向分离。飞行高度 25km, 马赫数 6, 迎角  $0^\circ$ 。每瓣质量 30kg, 质心大约位于全长的  $3/5$  处, 设计初始侧向分离速度 10m/s, 分离角速度  $15^\circ/\text{s}$ 。文献 [29] 中对  $30^\circ$  以前头罩的受力情况进行了分析, 这里不再论述。

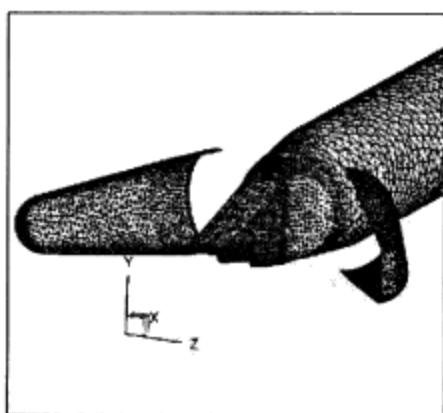


图 9.3 两瓣分离方案

图 9.4 给出了解锁机构作动、壳片离开弹体以后所受力矩、角速度和分离轨迹。壳片和弹体之间干扰机理非常复杂, 由于分离初期形成的流场内存在运

动激波、膨胀波等非线性流动现象,壳片受到的气动力矩变化异常剧烈,大约到了 15ms,壳片飞出弹体头部脱体激波区域,这时气动力矩相对平稳且绝对值较小。由于壳片质心位置靠前,力矩一直为负,转动角速度单调下降,从变化曲线看,大约 90ms 计算结束时向内转动的角速度大于  $2500^{\circ}/\text{s}$ ,初始角速度  $15^{\circ}/\text{s}$  几乎没有影响。分离后角速度很快变为负值,姿态角不断减小,在 40ms 时壳片相对气流接近  $0^{\circ}$ ,然后继续向内旋转,至 90ms 时姿态角从初始的外向  $30^{\circ}$  变为内向  $90^{\circ}$ ,这时壳片到弹体的最小距离接近弹体尾翼展长,同时侧向速度也非常小,综合评价该分离方案存在较大的风险。

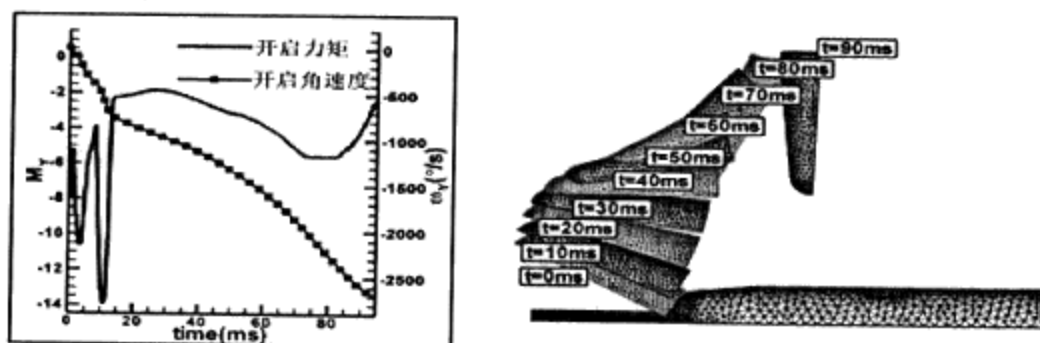


图 9.4 两瓣分离方案计算网格及分离轨迹

### § 9.2.1.2 修形方案及评估

根据上节中流场分析,由于力矩一直保持较大负值使姿态角向内急剧旋转,因此提出如图 9.5 所示的修形方案,采用安装尾裙来减小负的转动力矩、抑制内旋,希望壳片的姿态角保持在  $0^{\circ}$  附近。

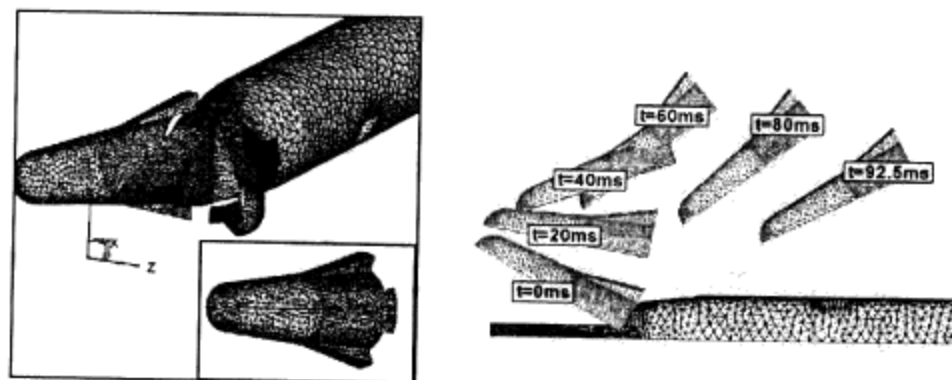


图 9.5 修形方案及分离轨迹

修形方案计算得到的分离轨迹如图 9.5 所示, 可见尾裙能够很好地抑制壳片向内旋转, 但是, 尾裙产生的气动力使侧向分离速度减小, 分离距离比原始方案还要近。

## § 9.2.2 “质心后移动态失稳抛罩”方法及验证

### § 9.2.2.1 分离设计方案模拟

在上一节安装尾裙方案中, 壳片稳定性增强以后分离反而更为困难, 进一步定性推测, 如果壳片稳定性很好, 那么在气动力远大于惯性力的情况下, 其运动轨迹接近驻点附近的流线, 安全分离需要精确控制姿态, 显然很难实现。受这一分析结论启发, 提出“质心后移动态失稳抛罩”方法, 即通过壳片质心位置后移, 增大其向外翻转的不稳定力矩, 利用壳片不稳定实现迅速分离。

“质心后移动态失稳抛罩”方法与其他通过提高分离速度方法相比, 主要差异在于不是采用控制初始分离姿态和速度来实现安全分离, 而是利用壳片失稳以后姿态变化提供更大的侧向气动力, 提高分离速度。

其他计算条件不变, 仅将质心调整至全长约 71% 处, 对于上一节介绍的两种方案, 计算得到的分离轨迹见图 9.6, 可见“质心后移动态失稳抛罩”是一种很有效的方法。相对而言, 原始方案由于弹体头部外形不对称流动的干扰, 壳片发生了横向滚动; 修形方案中, 尾裙增大了航向稳定性, 没有看到明显滚动和横摆。

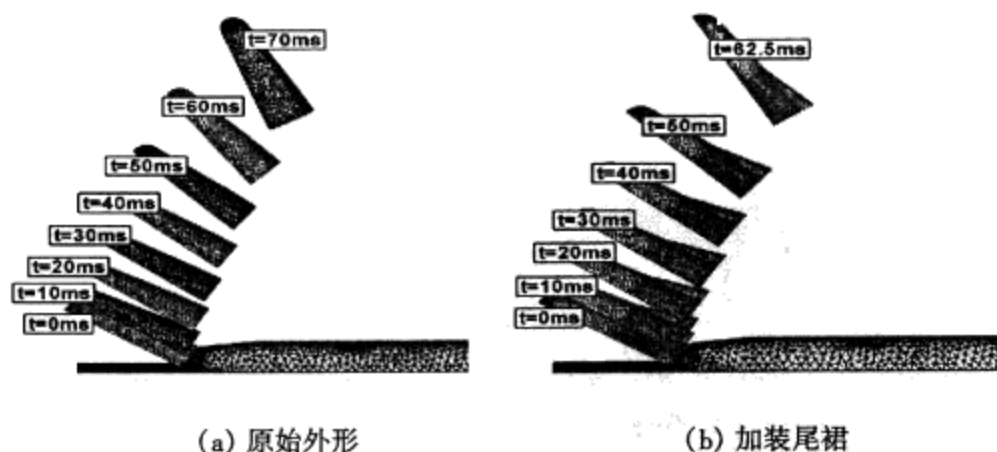


图 9.6 质心后移后的分离轨迹

### § 9.2.2.2 单独壳片模拟以及准定常模拟

在方案论证中,提出是否可以根据单独壳片的气动力特性来预测分离过程?为此开展如下数值模拟研究,图 9.7 给出三种条件下的气动力特性比较,其中,非定常模拟是上一节修形方案完整外形的计算结果,单独头罩是没有模拟弹体外形的非定常分离过程,定常模拟的流场中也仅有单独头罩,但是,采用类似于 CTS 实验准定常过程,在计算中取了 8 个站点。可以看出,如果单独研究壳片的气动力,准定常与非定常的模拟结果较为接近,在没有弹体干扰的情况下,壳片受到的气动力主要取决于姿态,由于初始阶段力矩较小,因此姿态变化不大,导致二者差别较小。但是,单独头罩和实际模型之间相差非常明显,主要原因是弹体与壳片之间流场内存在激波干扰。

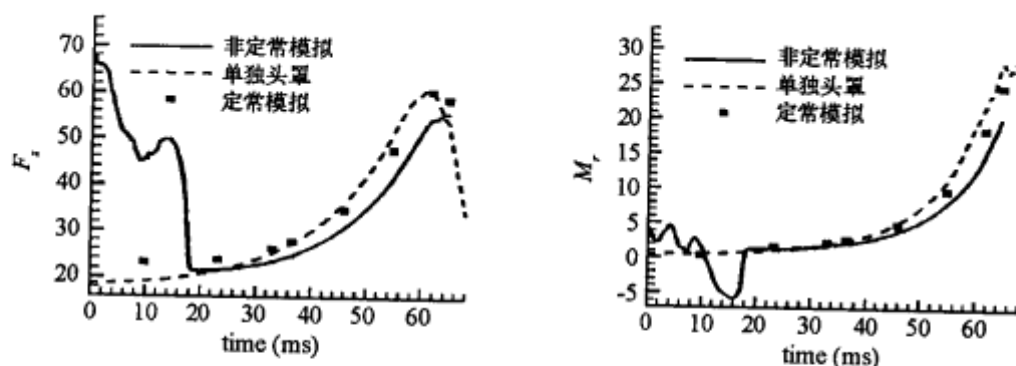


图 9.7 不同计算方法整流罩分离力及开启力矩比较

通过数值模拟可以得出结论,采用单独壳片进行研究,包括准定常和非定常模拟,都无法得到可靠的结果。

### § 9.2.3 四瓣方案

在论证初期,按照分离轨迹可控思路,为了避免壳片与尾翼碰撞,同时减小壳片开启到分离姿态角所需的铰链力矩,提出四瓣壳片方案。以空间第一象限中的壳片为研究对象,质量为 15kg,分离速度为 10m/s,分离角速度为 15°/s。图 9.8 分别给出质心位于头罩全长 1/2 处和 3/4 处的头罩分离轨迹。再次验证了“质心后移动态失稳抛罩”方法的有效性。

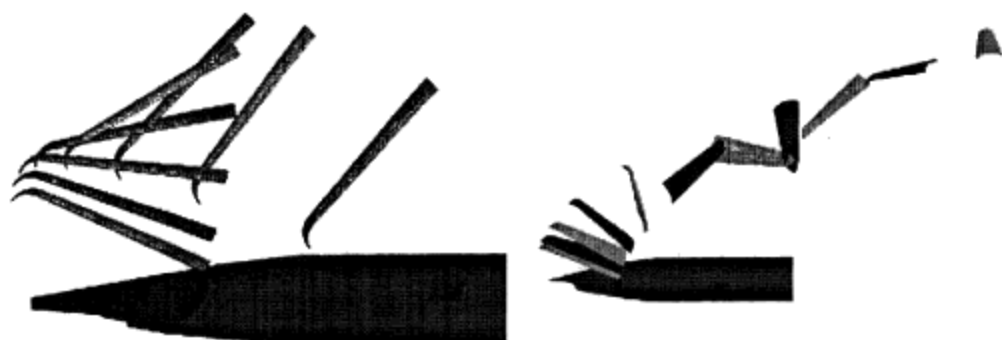


图 9.8 四瓣方案分离轨迹（左：质心位于 1/2 处；右：质心位于 3/4 处）

### § 9.3 “虚拟网格通气技术” 及应用<sup>[2,30]</sup>

为了增加整流罩分离过程的可控性，提出主动分离方案，在如图 9.9 所示的整流罩两侧布置姿控发动机，利用发动机推力从弹体前方拔出整流罩，合理地设计两个发动机推力差，还可以使整流罩迅速偏离弹体飞行路线。这种分离方案有利于简化分离机构、减少额外载荷、方便整流罩加工，是一种较新颖的分离方案。

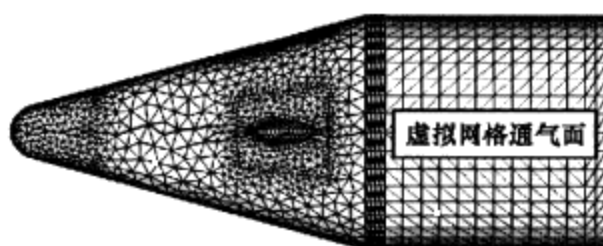


图 9.9 整流罩表面网格

整流罩飞行过程中是密封的，内部压力基本保持海平面大气压，因此在整流罩开启瞬间，内外压力相差两个数量级，通过分离狭缝产生的气流对整流罩及飞行器产生的作用力不容忽视。分离开始，整流罩和弹体连接处的缝隙由零增加，网格拓扑发生了变化，常见网格技术无法处理此类问题。部分文献和商用软件中提出一种近似处理方法，预先留小的间隙，计算开始后间隙逐渐变大，由于初期运动速度很小，在有限的时间内形成的间隙很小，而预先间隙太大与实际不符合，预留间隙太小又引起网格匹配和计算时间步长问题，另外，

分离前定常流场和分离中非定常流场需要采用两套网格。

为解决这一难题,提出“虚拟网格通气技术”,可以实现两个物体从接触到分离过程中网格拓扑变化。

### § 9.3.1 虚拟网格通气技术数值方法

虚拟网格通气技术实际上是一种可变边界条件的零厚度虚拟挡板,即人为地在接触/分离面布置无厚度挡板。模拟物体接触状态流场时,给挡板面双向赋壁面条件,此时相当于挡板内部全部为物体壁面,随着物体间隙的增大,将挡板面上的积分面元分为通气与壁面两个部分,两部分各占比例由间隙宽度决定。位于分离间隙内的为通气部分,位于间隙外的为壁面部分,相应的通量计算也作通气和壁面处理。整个过程如同“水闸”开闸一样,逐步释放两物体间的计算区域。这样使得初始分离区域网格构建十分容易、网格尺度不至于太小而影响计算时间,并且能够很好地模拟从接触到逐步远离的非定常过程。

具体数值方法如下,对半离散型的控制方程:

$$\left( V^{m+1} \frac{dQ}{dt} + Q^m \frac{dV}{dt} \right) = - \sum_{k=1}^4 F_k \cdot S_k \quad (9.9)$$

其中  $m$  表示时间层,  $S_k$  为第  $k$  个积分面的矢量面积。这是对流场中一般网格单元的离散形式,等式右侧是针对四面体单元四个三角形表面处理的。如果网格单元某个面位于虚拟挡板上,如图 9.10 中单元  $i$  的  $\Delta p_1 p_2 p_3$  位于虚拟挡板上,则可将上式改写为:

$$\left( V^{m+1} \frac{dQ}{dt} + Q^m \frac{dV}{dt} \right) = - \left( \sum_{k=1}^3 F_k \cdot S_k + F_b \cdot S_b \right) \quad (9.10)$$

(9.10) 式中右端项分别为一般表面的三个面通量求和以及位于虚拟挡板上的表面的通量。 $S_b$ 、 $F_b$  分别是位于虚拟挡板上的表面的面积以及其中心处的对流项。以图 9.10 为例,图中预留虚拟挡板的宽度为两层网格,某时刻物体间的实际距离为图中阴影部分,此时  $\Delta p_1 p_2 p_3$  中阴影部分作通气处理,其他部分作壁面处理,于是有:

$$S_b = S_f + S_w \quad (9.11)$$

其中  $S_f$ 、 $S_w$  分别是通气部分和壁面部分的面积,对流项  $F_b$  由下式计算:

$$F_b = F_f \frac{S_f}{S_b} + F_w \frac{S_w}{S_b} \quad (9.12)$$

式中  $F_f$  是作为内部单元面处理时的对流项,可按一般式处理;  $F_w$  是作为壁

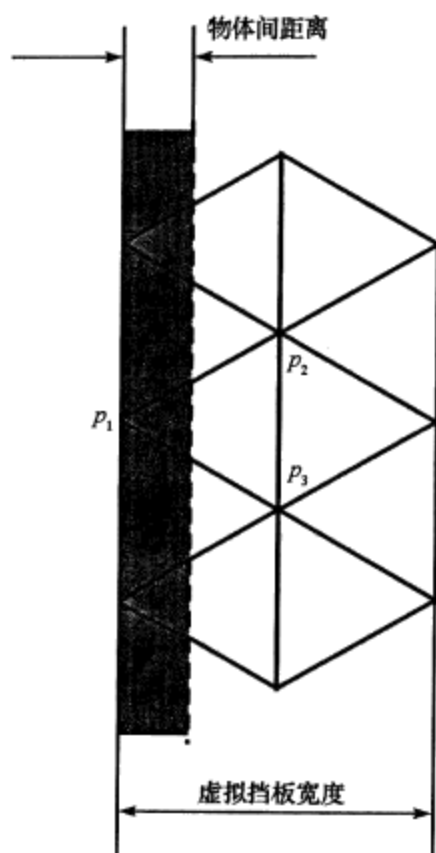


图 9.10 虚拟挡板示意图

面处理时该表面上的对流项，其对表面的通量积分为：

$$F_w \cdot S_w = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e + p \end{pmatrix} S_w + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ a_t \end{pmatrix} S_w \quad (9.13)$$

对壁面采用无粘流的无穿透条件，即  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$ ，则上式简化为：

$$F_w \cdot S_w = p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ a_t \end{pmatrix} S_w \quad (9.14)$$

计算通量积分时对流项  $F$  应取积分面上的平均值。

对于具有虚拟挡板表面的网格单元,应该针对该表面通气和壁面两种状态分别求解变量梯度,计算对流项  $F_f$  和  $F_w$  时分别采用相应的梯度进行基本变量的重建。

### § 9.3.2 虚拟网格通气技术的应用<sup>[2]</sup>

#### § 9.3.2.1 整流罩主动分离方案

图 9.9 给出了整流罩表面网格,分离发动机出口处和虚拟通气面附近的网格进行了局部加密。在定常流场计算中,虚拟网格通气面上的网格作为固壁处理,整流罩开启后,按照“虚拟网格通气技术”处理,即在分离缝隙上的网格根据分离距离计算出通气比例,不在分离缝隙上的网格仍作为固壁处理。图 9.11 给出了不同时刻的整流罩处网格,随着整流罩的远离,作为固壁处理的虚拟网格逐渐减少,至 44ms 整流罩与验证机间的间隙已足够大,可以采用动网格方法继续计算。

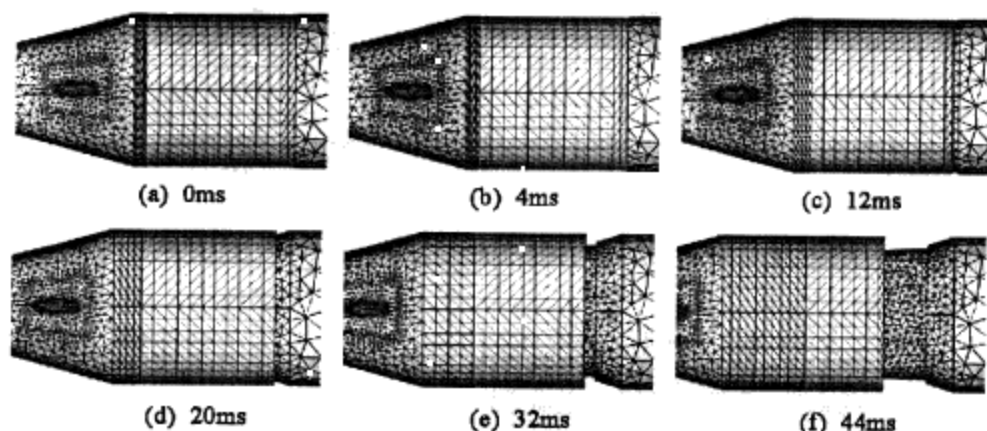


图 9.11 不同时刻的整流罩位置

#### § 9.3.2.2 隐身飞机弹舱开启过程模拟

现代飞机的内置弹舱能有效地降低飞行阻力及雷达反射面积,对提高飞机机动性能及隐身性能很有帮助,但内置弹舱舱门开启后将形成空腔流动,弹舱中的流动将出现自持振荡,产生剧烈的压力、速度等脉动,从而诱发严重的激波/激波、激波/膨胀波相互干扰等复杂流动现象。舱门开启过程中,弹舱逐步

暴露于来流中,开启过程的非定常效应明显,因此采用准定常方法研究这一过程不适应,而其他网格方法在描述舱门从关闭到开缝极短时间流动时存在困难。本书作者利用非结构动网格技术结合“虚拟网格通气技术”解决了F-117内置弹舱开启过程的动态仿真问题,实现从弹舱完全关闭到打开全过程的模拟。

首先在全机表面构建网格,将舱门从关闭位置预开启 $\theta = 6.27^\circ$ 形成微小开启间隙,在开启间隙构造“虚拟网格通气面”1、2、3(如图9.12)。计算开始时,认为舱门密闭,通气面1、2、3均为单向壁面条件,隔绝弹舱与外界流动。随着舱门被打开,按照舱门开启角度构造平面切割通气面,位于开启角度以内的为流通内部边界,气流可以通过进入弹舱,而位于开启角度以外的仍然为壁面条件,计算至弹舱开启 $6.27^\circ$ 时,通气面完全打开,全部按照流动内部边界处理,而后采用非结构动网格技术完成开启过程。

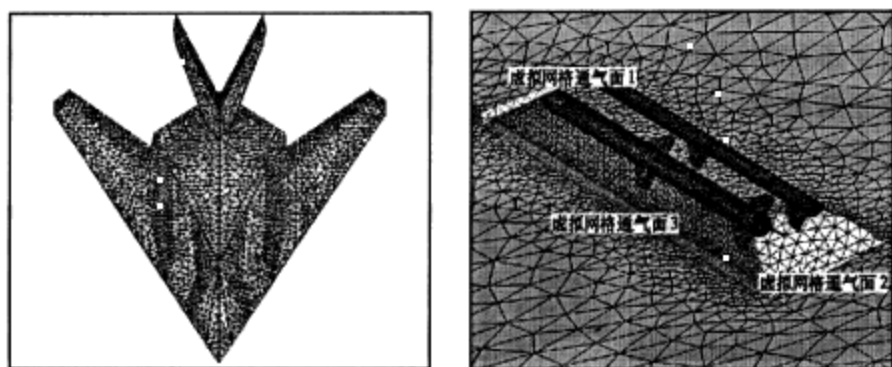


图9.12 “F-117”表面网格及弹舱虚拟网格通气面布置

计算条件:  $Ma = 0.8$ , 攻角  $\alpha = 2^\circ$ , 来流动压  $24.21 \text{ kPa}$ , 舱门开启速度  $90^\circ/\text{s}$ , 飞机质心位于全长的  $35\%$  处。舱门开启后,流动在舱前缘及舱盖处将产生分离,不稳定波随流动向下游发展而后与舱后壁发生碰撞产生扰动波,扰动波再以波的形式传到舱前缘及舱门区域,来流的不稳定波与反馈的扰动波之间相互激励、增强,导致空腔内流动以特定的频率产生剧烈的压力振荡,整个流动的非定常效应非常显著。图9.13给出了舱内挂弹上四个观测点的位置及压力变化。由压力变化曲线可见,舱门开启过程中,弹舱内的气体产生很高的压力脉动,挂弹底部压力明显高于前部的压力并且变化更加剧烈。底部测点最高及最低峰值压比达到了1.3,强烈的压力脉动会使挂弹受力变化剧烈并将产生高频脉动声压,这对挂架系统的可靠性提出了更高的要求。

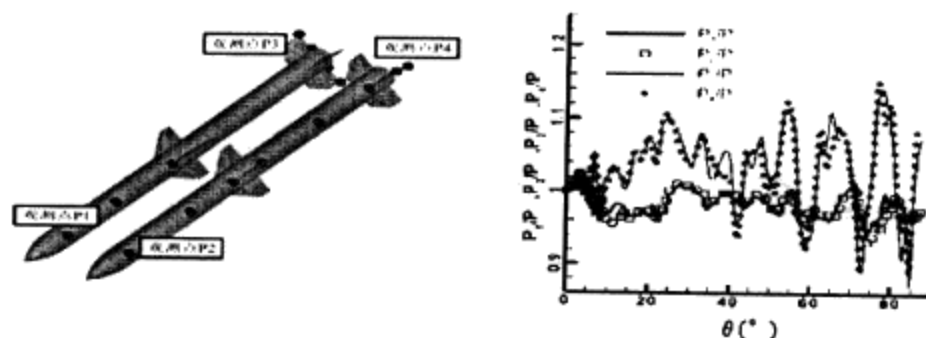


图 9.13 导弹表面观测点位置及压力变化

图 9.14 给出飞机的气动力和气动力矩随开启角度的变化。可见舱门开启后飞机受力及力矩变化比较剧烈，舱内的压力振荡导致飞机受力及力矩呈现振荡过程并且幅值不断扩大，侧向力、滚转力矩及俯仰力矩的变化将直接影响到飞机的操控性能。

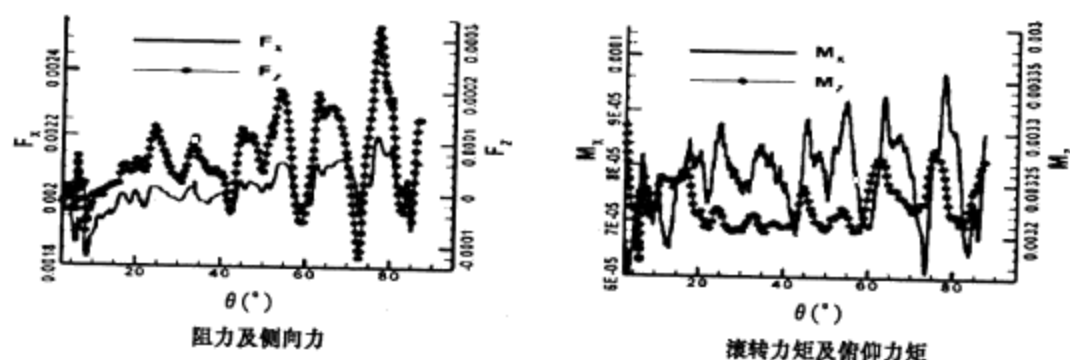
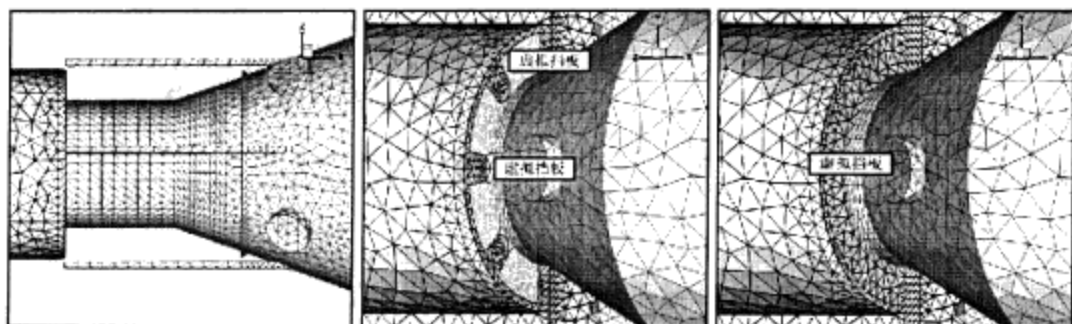


图 9.14 飞机所受气动力及力矩的变化

## § 9.4 内嵌式助推器分离过程数值模拟<sup>[31]</sup>

冲压发动机不需携带氧化剂，与传统的火箭发动机相比，具有更高的安全性、可靠性和更低的使用费用，是飞行马赫数大于 3 以后飞行器较为理想的推进系统。但是，冲压发动机对飞行速度和高度有要求，在应用中大多采用火箭助推方式使其达到设计超声速飞行条件。为了减小飞行器的总长，一种做法是采用内嵌式助推器，如图 9.15 所示，助推火箭头部置于冲压发动机的燃烧室内。这种设计方案存在的问题是分离时间较长，当助推器与弹体解锁以后，助

助推器在完全分离之前在弹体燃烧室内轴向滑动一定距离,这对分离的可靠性、前体的姿态控制提出了很高的要求。



(a) 外部导轨

(b) 内部堵块

(c) 内部环

图 9.15 助推器与前体的联结方式

为了保证分离过程的安全性,考虑了多种分离方案和约束机构,如安装导轨、在前体喷管出口加装环状支撑、堵块支撑等方法限制分离沿轴向进行,或者采用两次分离方案,将助推器切割为两部分,依次分离。图 9.15 依次显示了不同方案的计算网格。

在助推加速阶段,为了避免气流在冲压发动机燃烧室内部的干扰问题和降低阻力,进气道口采用整流罩封堵,整流罩在分离前打开,经过适当延迟后,助推火箭分离,底部堵盖打开,燃烧室达到通流状态,然后冲压发动机点火,开始正常工作。

助推器与前体飞行器的分离过程十分复杂,其数值模拟工作存在诸多困难。这主要表现在:

(1) 分离及约束机构的方案众多,如两次分离方案、导轨约束、环状支撑、堵块支撑等,不同方案的流动现象也有差异;

(2) 几何外形复杂,如图 9.15 所示,且需针对不同的分离方案单独生成网格;

(3) 流场中需要布置多处“虚拟网格透气面”(虚拟挡板)。比如进气道入口,在助推加速阶段完全封闭,而在分离开始前开启。燃烧室下游出口也有类似的情况,其虚拟挡板的位置如图 9.15 所示。

(4) 分离过程复杂,需要耦合多体刚体动力学求解过程。一般的分离问题虽然涉及多个物体的运动,如飞机投弹,但分离过程中弹体与母机间不存在相互作用,二者的刚体运动方程可以分开求解。而对此问题,在分离过程中,飞行器与助推器之间发生相对运动,同时通过约束结构传递内力(压力及摩擦

力), 二者的刚体运动方程必须联立耦合求解, 这大大增加了刚体运动模块求解的难度。

(5) 分离过程中存在强烈的非定常流动, 飞行器所受的非定常气动力十分强烈。进气道整流罩打开后, 气流冲入燃烧室, 会造成燃烧室内压力的剧烈振荡。分离开始后, 由于物体的相互作用引发燃烧室内及其出口下游的非定常流动, 这些流动现象也对分离过程的态度控制提出了很高的要求。

(6) 由于进气道整流罩打开后的压力振荡过程衰减很慢, 分离过程中一直伴随着进气道的压力振荡, 因而必须考虑分离时机的选择, 比如波峰分离还是波谷分离;

(7) 为了全面掌握分离过程, 需要得到的数据也很多, 包括前体及助推器的位置、姿态、速度、所受气动力(力矩)、合力(力矩)等, 以及约束机构受力、流场典型位置的压力—时间曲线、前体及助推器各部件的气动力, 等等。

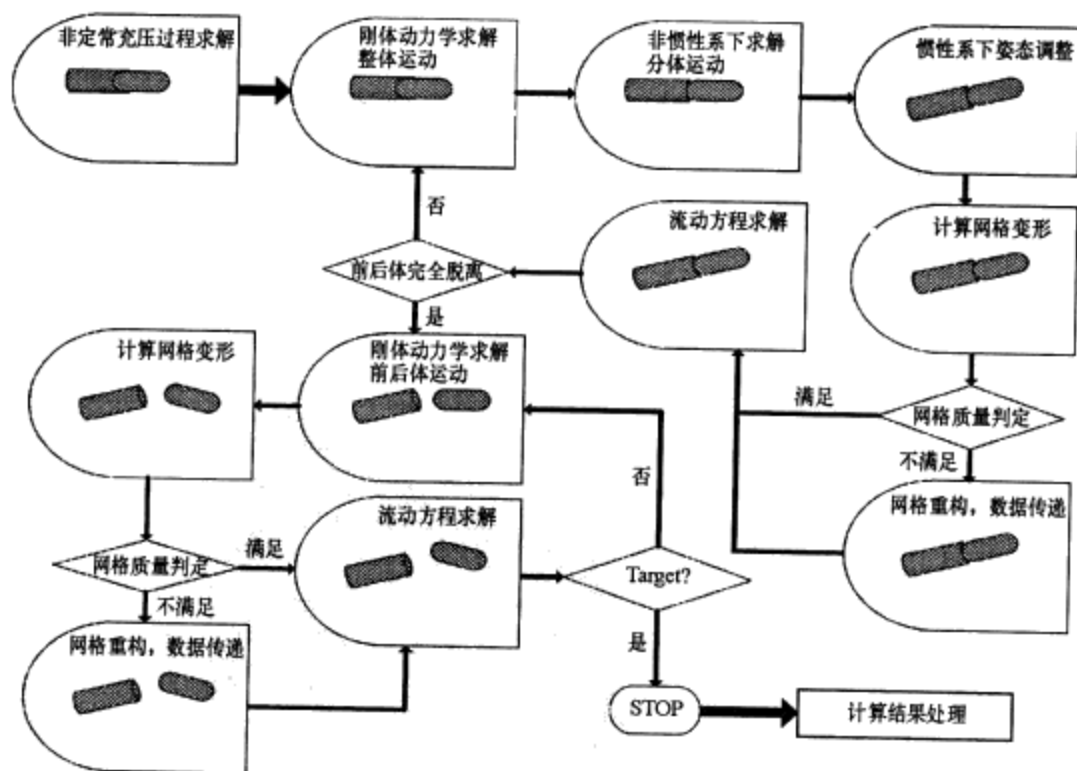


图 9.16 数值模拟流程

### § 9.4.1 开启进气道整流罩的压力振荡过程

进气道入口附近的计算外形如图 9.17 所示, 进气道采用两级外压缩。由于三维非结构网格的粘性计算效率低, 难以开展有效的研究工作。首先, 采用二维简化模型和符合粘性流动模拟的细密网格, 从 Euler 方程和 NS 方程出发进行模拟, 通过计算结果的比较来考察粘性的影响。然后, 在 Euler 方程基础上, 考虑内部喷注器等细致结构的三维模型和二维简化模型比较, 考察复杂外形的影响。在燃烧室内布置了四个压力监测点。图中还给出了进气道整流罩开启前的流场马赫数等值线, 进气道关闭形成的脱体激波与中心体前缘产生的斜激波在 E 点相交, 形成三波点和  $\lambda$  波结构, 并在中心体上诱导了边界层分离。

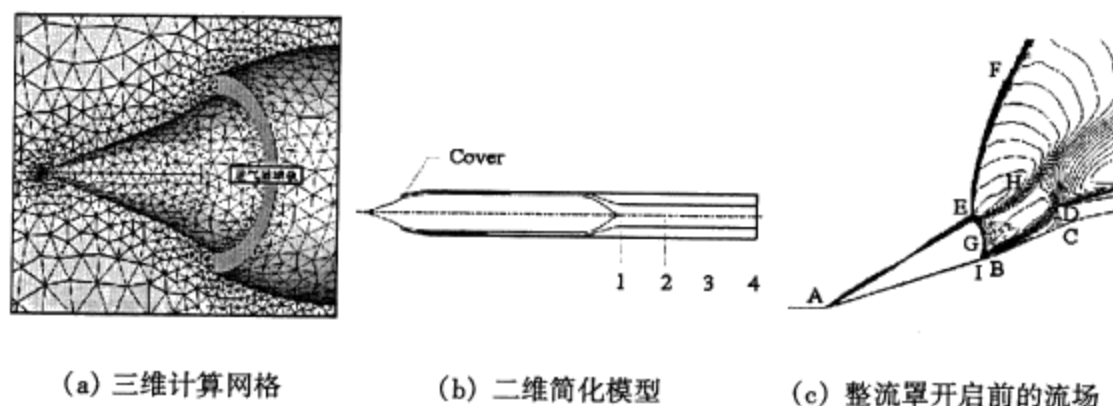


图 9.17 进气道开启后压力振荡过程的数值计算模型

进气道整流罩开启之前, 进气道内为环境压力, 而整流罩外侧压力远高于环境压力。整流罩开启后, 高压气体进入进气道, 使得前方的脱体激波迅速后移 (图 9.18 (a)), 逐渐地, 脱体激波消失, 气流在进气道内壅塞, 在入口处形成正激波 (图 9.18 (b))。此时助推火箭尚未分离, 燃烧室内是封闭的空腔, 气流进入燃烧室后滞止、减速, 压力上升。下游压力升高至一定程度后, 进气道口整流罩处的正激波不足以维持, 于是在进气道入口前形成了一道脱体的弓形激波 (图 9.18 (c))。此时进气道入口仍处于正向的流动状态, 气体仍在涌入进气道。随着进气道和燃烧室内压力的进一步升高, 进气道前的弓形激波不断前移, 进气道入口处的气流速度也逐渐降低, 直至为零, 然后反向 (图 9.18 (d)), 此时燃烧室内压力已经比进气道外主流的压力高很多。反向气流可达到超声速 (图 9.18 (e)), 在进气道入口外经过一道弧形的激波减速增压后, 与主流汇合。此时前方的弓形激波已经移到中心体前缘之前, 完全吞噬了

之前中心体两处折转处产生的斜激波。随着进气道处气体的流出,进气道和燃烧室内的压力又不断下降,弓形激波又逐渐后移(图 9.18 (f)),流动完成了一个周期,之后将重复此过程,燃烧室不断地增压、减压,外流场的激波位置也会随之反复变化。

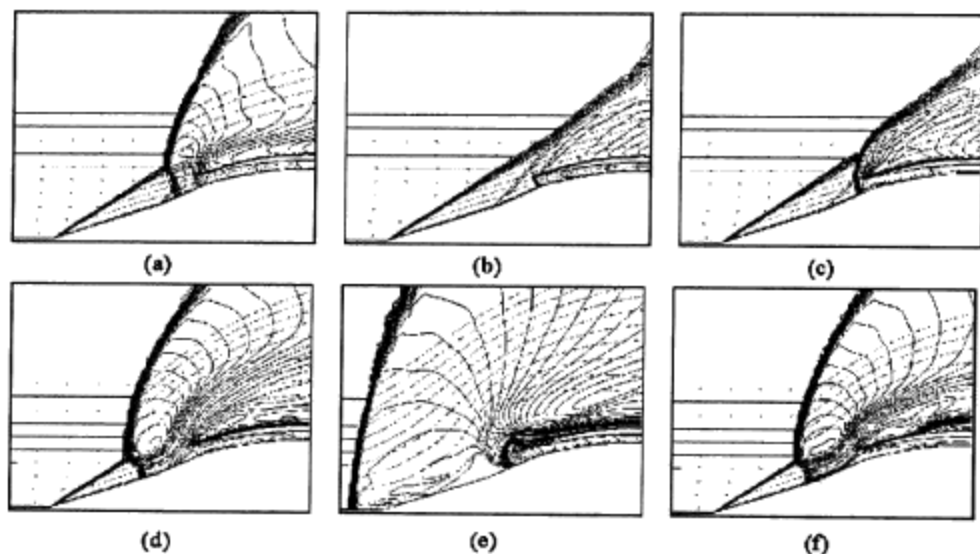


图 9.18 马赫数等值线和流线(时间:1.74ms、3.97ms、35.4ms、41.4ms、55.4ms、80.5ms)

由于燃烧室内流动速度很小,图 9.17 中四个监测点的压力十分接近,都存在周期性的振荡过程。图 9.19 给出了第四个监测点的压力随时间变化的历程,其振荡频率约为 16Hz,振幅达到了 37.9 倍来流压力。共计算了 3 个周期,压力的振幅变化都很小。图中 Euler 方程和 NS 方程的计算结果相差不大,其原因是流场的雷诺数很大,而且非定常性显著,在这种情况下,控制方程中的粘性应力项相对于对流项和时间导数项是一个小量,对计算结果影响不大。如果不考虑压力变化的细节,那么 Euler 方程的结果是可以接受的。图中同时给出了三维导轨支撑方案计算得到的压力振荡过程,与二维相比,三维的压力振荡频率更快,压力波动较为平滑,而压力峰值与二维 NS 方程的计算结果比较一致。造成这种差异的原因是三维计算时考虑了流道中的一些真实部件,而且外形尺寸如进气道长度、燃烧室容积等与二维有差异。

图 9.20 给出了不同支撑方案的压力振荡过程,其中导轨支撑方案中燃烧室下游是堵死的,环状支撑方案中燃烧室下游留有较小的缝隙,而堵块支撑方案中燃烧室下游有 2/3 的面积是通气的。可以看出,由于堵块方案下游存在泄流,因而其压力振荡衰减很快。

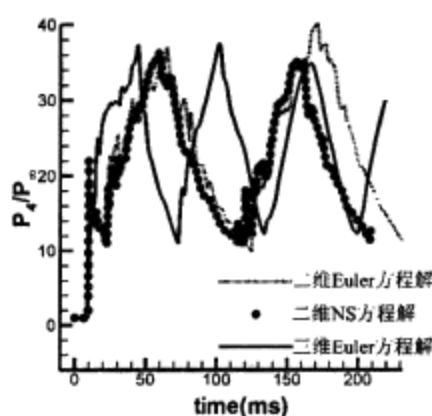


图 9.19 监测点的压力历程比较

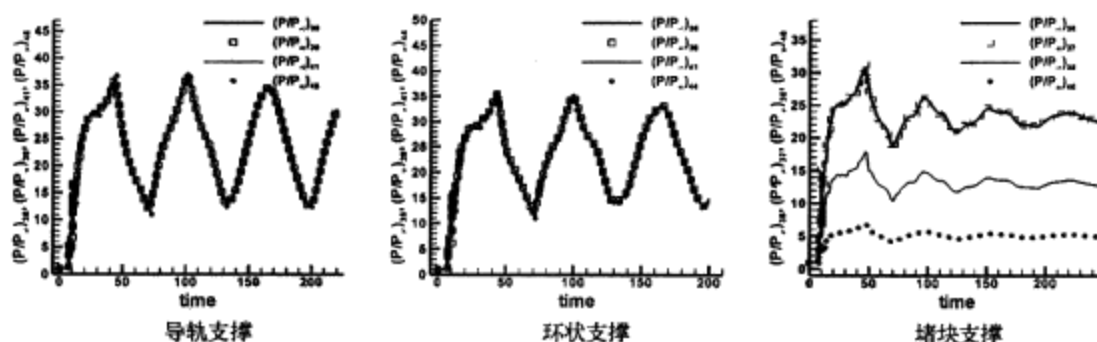


图 9.20 不同方案的压力振荡过程

总的来说,进气道整流罩开启后,进气道内存在强烈的压力振荡,振幅高达三十余倍环境压力,且下游无泄流或泄流较小时振荡衰减很慢,这种流动特性不利于飞行器的结构设计和稳定控制;振荡过程中的非定常效应显著,雷诺数大,采用 Euler 方程计算的结果与 NS 方程相差不大,却可以大大提高计算效率;出口泄流对压力振荡过程影响很大,泄流较大振荡能够很快衰减。

### § 9.4.2 助推器完全脱离前、后体的相对运动求解

进气道整流罩打开后一段时间,助推火箭开始分离。由于导轨、堵块等约束的存在,在助推器头部完全从前体燃烧室中脱离前,前体与助推器之间只能做轴向的相对运动;而且二者之间存在相互作用力,包括支撑力和摩擦力,分

别沿飞行器的法向和轴向。内力的存在将前体和助推器的运动方程耦合了起来, 成为一个多体动力学问题, 使得问题的求解变得更加复杂, 为此需要在 § 9.1 节的六自由度运动方程求解方法的基础上发展多体动力学求解方法。

多体动力学理论参考文献 [32], 下面介绍求解过程。

### 1. 求解整体的运动状态

将前后体看做一个整体, 则相互的支撑力和摩擦力是内力, 不改变整体的运动姿态。于是可按照 § 9.1 节的步骤求解整体质心的位移、速度, 以及整体的角速度、角加速度等。求解时需要用到质点系的质心位置公式:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m} \quad (9.15)$$

整体的转动惯量可由各部分的转动惯量经平行轴定理平移至整体的质心, 然后相加得到。转动惯量的平行轴定理为

$$I = I' + Md^2 \quad (9.16)$$

### 2. 求解两体间作用力

非惯性系 (动系)  $o'x'y'z'$  中动点  $M$  在惯性系下的加速度可表示为:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_k \quad (9.17)$$

$\mathbf{a}_r$  为动点相对动系的加速度,  $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{o'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  为动点的牵连加速度,  $\mathbf{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$  为科氏加速度。其中  $\mathbf{a}_{o'}$  为  $o'$  在惯性系下的加速度,  $\boldsymbol{\omega}$  为非惯性系的角速度,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为其角加速度,  $\mathbf{r}'$  为  $M$  在非惯性系下的矢径,  $\mathbf{v}_r$  为  $M$  相对非惯性系的速度。

若取非惯性系为前后体整体的体坐标系, 动点为前 (后) 体的质心, 那么,  $\mathbf{a}_e$ 、 $\mathbf{a}_k$  已知,  $\mathbf{a}_r$  仅有轴向分量。因此:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_e + m\mathbf{a}_k \quad (9.18)$$

$\mathbf{F}_o$  为前 (后) 体所受外力,  $\mathbf{F}_i$  为前后体间内力, 其法向和轴向分量分别为  $N$  和  $\mu N$ ,  $\mu$  为摩擦系数。求解 (9.18) 式可得  $\mathbf{a}_r$  和  $\mathbf{F}_i$ , 进而可求得前 (后) 体单独的运动状态。

图 9.21 给出了上述求解过程的流程图。

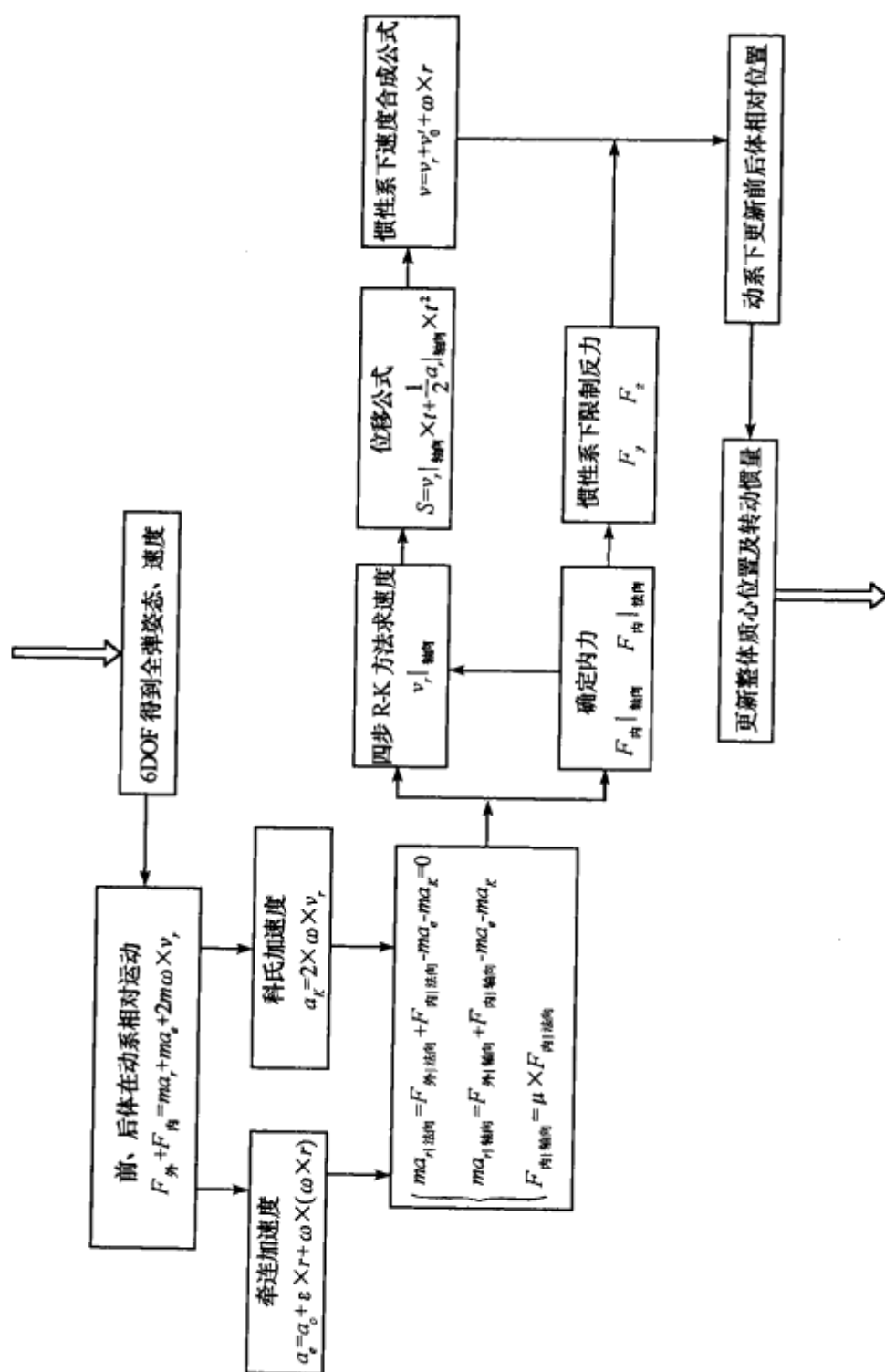


图 9.21 前、后体相对运动的求解过程

### § 9.4.3 分离过程的数值模拟结果

图 9.22 和图 9.23 给出了几个典型状态的计算结果, 其中 CASE2 为堵块支撑方案, CASE4 为导轨支撑方案, CASE5 为环状支撑方案, 计算攻角均为  $3^\circ$ 。从图上可以看出, 在分离前期, 前体具有向前加速的趋势 (速度为负), 这是由于燃烧室内压力大于前体头部压力, 前体受到压差产生的推力。相比较而言, 导轨支撑加速最快, 环状支撑加速最慢。在分离后期, 由于前体发动机形成通流, 因而前体开始减速。从气动载荷可以看出, 分离过程中助推器所受法向力和俯仰力矩存在剧烈的振荡, 尤其是在 100ms 附近, 此时正是助推器头部通过前体喉道的时候, 此时燃烧室内的流动异常复杂, 不仅存在轴向的压力脉动, 而且由于攻角的存在, 法向的压力也不同, 从而导致作用在助推器上的法向力变化剧烈。

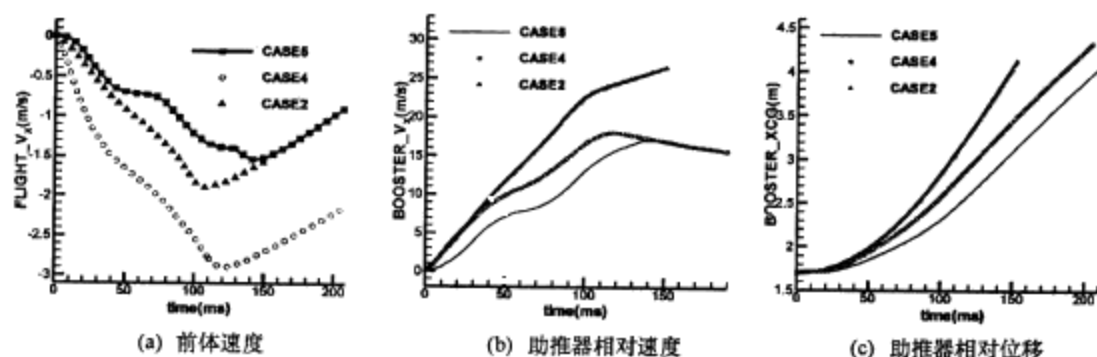


图 9.22 前体及助推器的速度、位移

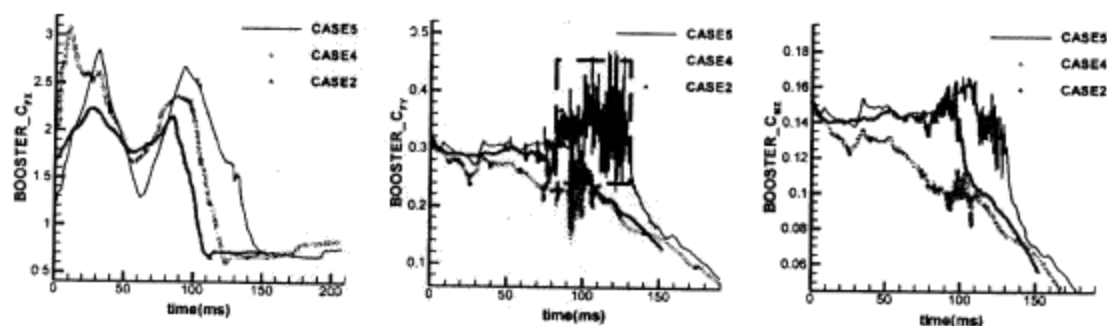


图 9.23 助推器的气动载荷

图 9.24 中左图给出了 100ms 前后前体的法向力变化情况, 其现象与助推

器的相同,在助推器与其脱离前后,气动力剧烈振荡。右图中给出了前体与助推器间法向内力的变化情况,同样在脱离前后振荡剧烈。

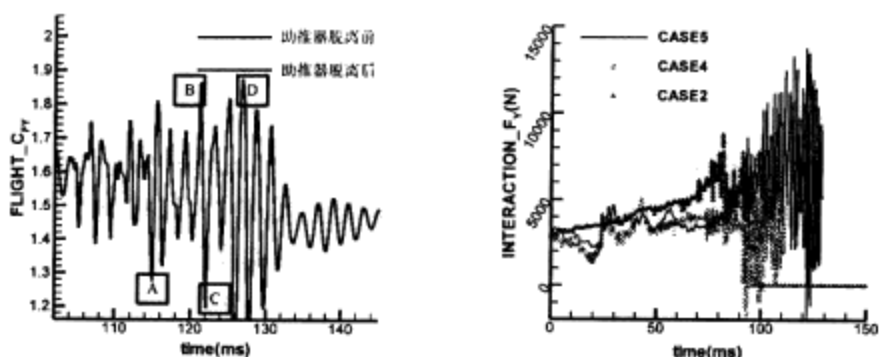


图 9.24 助推器脱离前后作用力的振荡

图 9.25 显示了计算终止时前体与助推器的相对位置,左图为两次分离方案,此方案前体与助推器间无约束机构,且飞行器攻角为  $3^\circ$ ,由于法向力及俯仰力矩的作用,前体与助推器发生了碰撞,分离失败。右图为钢管分离方案,可见分离正常,助推器已经脱离前体一定的距离,可以判定分离成功。

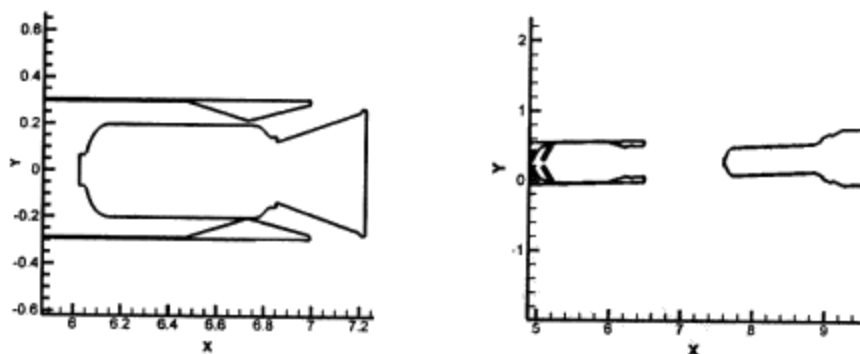


图 9.25 计算终止时前体与助推器的相对位置

## § 9.5 子母弹抛撒过程数值模拟

子母弹以其攻击范围广、毁伤面积大被广泛地应用于攻击集群目标,如子母弹布雷、攻击敌集群装甲车辆、人员等。随着制导系统、控制系统、布撒方式的发展,精确末制导的子母弹能够更迅速、准确地攻击多个目标或对目标进行饱和攻击。子母弹抛撒方式可大致分为三类:化学能抛撒、离心式抛撒、气

动力抛撒。本书作者研究的是采用离心式抛撒的子母弹。离心式抛撒方式原理简单,将子弹在母弹中沿一定方式排布,当母弹飞行到预定点后,利用一定方式,如展开弧形尾翼等,使母弹旋转起来,当到达布撒点时打开舱盖,由离心力将子弹抛出舱外。

离心式抛撒方式的子母弹抛撒过程大致包括三个阶段,即战斗部起旋、子母弹切壳、子弹抛撒。通过控制飞行时序这三个阶段能够相对独立地进行研究。

计算时母弹的旋转采用全流场区域旋转的方式,利用动网格方法给定来流边界处的网格速度,在求解入口、出口边界时考虑网格运动速度。计算外形如图 9.26 所示,子母弹包含四片壳片,壳片密封前后两个弹舱,弹舱内各排布两排子弹,子弹出舱后还要打开四片卷弧尾翼。



图 9.26 子母弹计算外形

计算过程中共涉及 4 片壳片、27 个子弹和母弹,共计 32 个运动物体的弹道和流场耦合计算。

### § 9.5.1 抛壳过程

壳片抛撒时由分离机构提供分离初速度及开启角速度,由于母弹旋转,壳片还具有旋转切向速度,文献 [18] 对壳片抛撒过程有较为详细的叙述。壳片分离速度为沿离心方向  $12\text{m/s}$ ,沿旋转切向  $7\text{m/s}$ ,壳片开启角速度  $150^\circ/\text{s}$ ,根据 § 9.2 节的结论,采用“质心后移法”,调整质心位置,利用壳片的不稳定性实现分离。图 9.27 给出了壳片分离轨迹,可见壳片姿态变化较平稳,抛撒

能够实现。



图 9.27 壳片分离轨迹

### § 9.5.2 子弹抛撒过程

相对于壳片抛撒，子弹数目多，分离时位置接近，而且子弹质量一致，子弹间的相互干扰将十分严重，尤其是前舱子弹对后舱子弹流场的影响尤为突出，因此采用准定常方法不能满足要求。此外，子弹在抛撒后一定时刻将展开弧形弹翼，采用嵌套网格等方法，由于存在网格拓扑的变化，网格生成将十分困难。本书中所介绍的非结构动网格方法较好地模拟了前后舱两层子弹的抛撒、子弹开翼的过程。

图 9.28 给出了分离各时刻等压力云图。首先释放出外层子弹（图 9.28 (a)），其中前舱子弹头部激波在母弹表面形成了较高的压力带状区域（图 9.28 (b)，(c)）。接着外层子弹打开弹翼（图 9.28 (d)），开始旋转，之后内层子弹释放（图 9.28 (e)），并打开弹翼（图 9.28 (f)）。总体而言，前舱舱壁及母弹头部的作用使得前舱子弹中后部的压力较高，而后舱子弹受母弹及弹舱的影响较弱，受前舱子弹的影响比较严重。子弹弹翼打开后，子弹的受力发生明显变化，子弹姿态也受到很大影响，计算至 71ms 时部分子弹的姿态已发生显著变化。

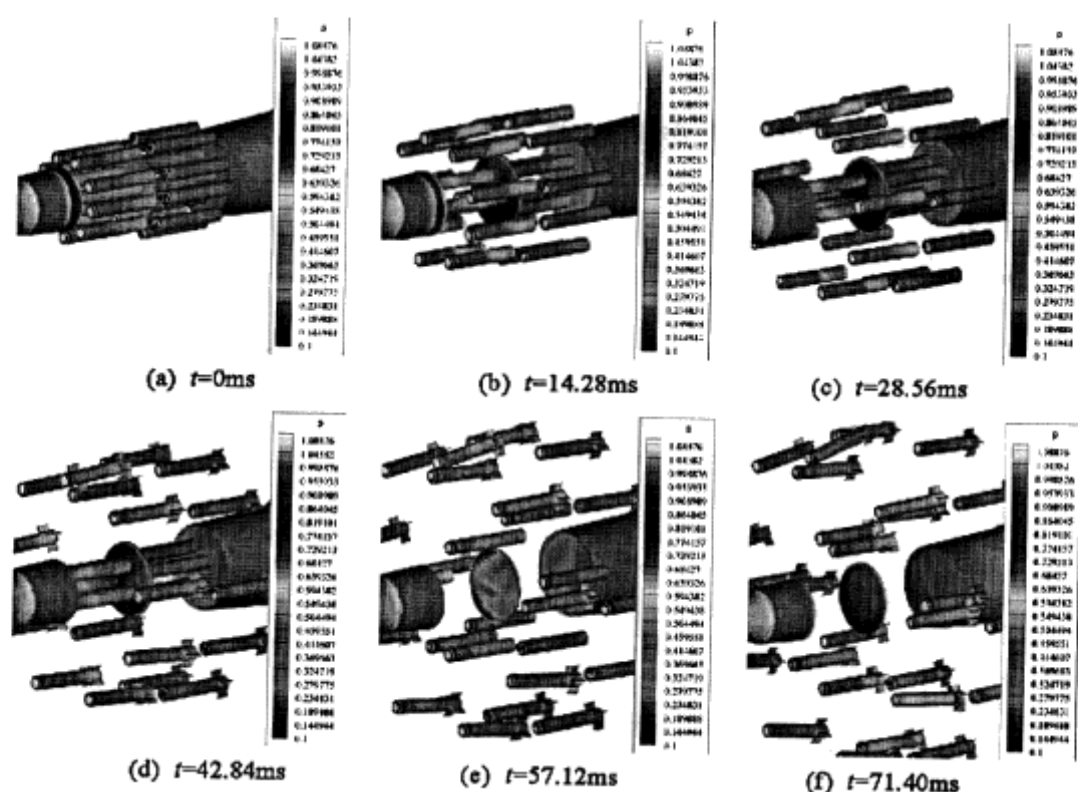


图 9.28 分离各时刻等压力云图

## § 9.6 多体分离软件简介

针对以上在子母弹抛撒、整流罩分离、助推器分离等涉及非定常多体分离问题的工程领域的进行了广泛应用。目前，正在开发专门用于有相对运动的多体分离问题的数值模拟软件，称为多体分离软件 MBSP (Multi-Body Separation Program)。

MBSP 界面如图 9.29 所示，在左侧控制栏中可以显示读入网格单元的、面以及体的信息，同时对不同类别的面加以区分，并在列表框中进行显示。通过界面控制键，可以进行读入网格数据、设置初始参数、调用不同求解器等操作，完成有关数值计算。界面右侧对读入网格界面进行显示，并可以进行缩放、旋转、拖动等操作。在多体分离计算过程中，需要区分可动物体、静止物体，因此，在显示图形时可以通过单击列表框中的选项，使该面显示为实体，如图中整流罩所示，以方便地确定所选物体的类型。图中最右侧的对话框为单

元类型及特征参数输入对话框，用以完成单元类型的修改、特征参数输入等动作。

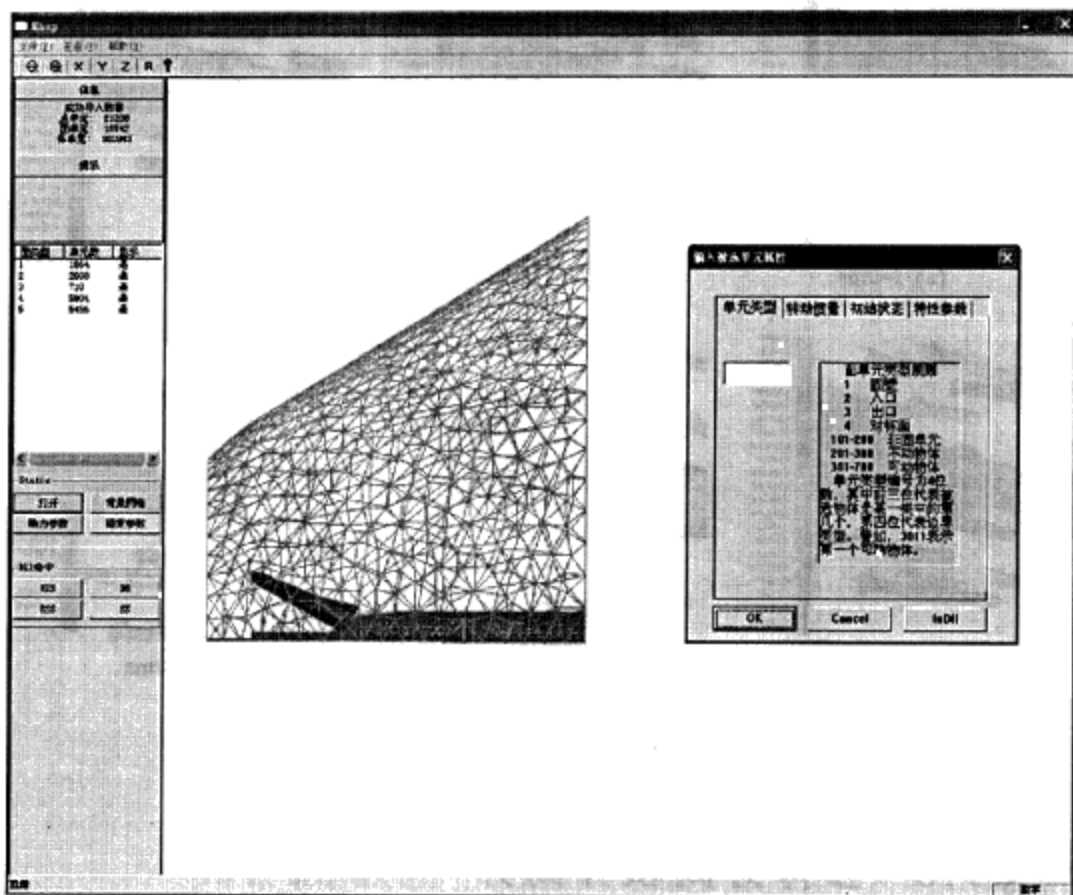


图 9.29 MBSP 操作界面

MBSP 在计算过程中采用松耦合的方法实现了流体力学和刚体动力学之间的耦合计算，对有相对运动的多体分离问题进行完全非定常求解；采用基于弹簧近似的网格变形和基于 Delaunay 非结构网格生成方法的局部重构方法相结合的非结构动网格技术，物体在分离过程中计算区域网格的变形与重构。MBSP 在求解过程中只需要在初始时刻设定特征参数和各网格单元的类型，将自动完成流体力学方程与刚体动力学方程的耦合求解；在网格质量明显下降后，MBSP 自动进行网格重构、数值传递等过程，并继续进行后续计算，其求解过程为非定常过程，克服了准定常模拟方法的不足。

## 第十章 阀门管道中的复杂流动模拟

### § 10.1 阀门数值模拟研究现状

阀门 (valve), 有时又称活门, 是流体管路系统中重要组件之一, 其基本功能是接通或切断管路介质的流通, 改变介质的流动方向, 调节介质的压力和流量, 保护管路设备正常运行。

阀门种类繁多, 分类方法也比较多。根据管路系统中流动介质分为气体阀 (气阀) 和液体阀。根据驱动方式的能量来源分为两大类: 第一类是自动阀门: 依靠介质 (液体、气体) 本身的能量和作动力而自行动作的阀门, 如止回阀、安全阀、调节阀、减压阀等; 第二类是驱动阀门: 借动手动、电动、液动、气动来操纵动作的阀门, 如闸阀, 截止阀、节流阀、蝶阀、球阀、旋塞阀等。

自动阀门是现代工业生产中普遍使用的控制装置, 为保证管路系统稳定地工作, 要求阀门密封可靠、动作灵活、能耐介质腐蚀并具有足够强度。随着现代工业的不断发展, 一方面阀门需求量不断增长, 另一方面对阀门提出了更高的要求, 促使人们研究和生产高品质阀门。例如, 在火箭发动机等特殊使用环境, 根据工作特点对阀门设计提出不少特殊要求, 耐腐蚀, 特别是强酸碱介质; 抗低温, 有时要抗超低温; 严密封, 尤其是易燃、易爆、剧毒品介质的密封关系到生命安全; 高可靠性等。根据文献报道, 目前应用的阀门环境工作温度从超低温  $-269^{\circ}\text{C}$  到高温  $3430^{\circ}\text{C}$ , 工作压力从超真空  $1.33\text{E}10^{-8}\text{MPa}$  到超高压  $1460\text{MPa}$ , 阀门通径从小于  $1\text{mm}$  到  $9750\text{mm}$ , 阀门的材料从早期铸铁、碳素钢发展到钛、钛合金、高强度耐腐蚀钢等。

自动阀门用途广泛, 是比较常见的工业产品, 设计过程主要借鉴已有的设计规范和经验进行。首先, 根据给定参数 (气源压力、阀最大输出压力、通气能力、最大操纵力和行程等) 进行结构设计; 在确定结构设计基本参数和结构

型式以后,开始结构设计分析与计算;最后,在完成结构设计分析与计算以后,开始生产试件和验收试验。阀门研制中大量的工作是对试件进行静态特性和动态特性试验,考察阀门是否满足设计指标和使用要求。

阀门的静态特性是指介质在稳定流动状态下,阀门出口压力的变化情况,它可分为压力特性和流量特性:

(1) 压力特性:当流量等参数不变时,阀门出口压力随入口压力变化的规律。

(2) 流量特性:当入口压力等参数不变时,阀门出口压力随流量变化的规律。

影响静态特性的因素很多,其中结构形式和结构参数影响最大,此外还有流量、温度、环境压力、振动、过载及调压点等影响因素。

阀门的动态特性试验主要考察以下几个参数:

(1) 动态超调量:定义最高瞬时压力峰值与额定压力的差值为动态超调量,一般希望动态超调量要小,否则易出现元件损坏或管路破裂等事故。

(2) 卸荷时间及压力回升时间:反映从一个稳定状态到另一个稳定状态所需的过渡时间,过渡时间短则动态性能好,但是,阀门中的活动元件有质量惯性和运动阻尼,总有滞后效应,振动与阻尼相互制约,有时出现谐振,甚至系统失稳发散。

(3) 压力稳定性:是指在流量波动、压力突变等干扰因素作用下,阀门的出口压力稳定性。常见的有启动、关闭、振动和过载等条件下稳定性检验,如果压力稳定性不好还会出现剧烈的振动和啸叫声。

传统的阀门研制过程是按照静态性能要求和经验进行设计的,产品试样经过试验获得静态和动态性能,如果性能不满足设计要求时,调整相应的结构参数,然后重新生产、试验、改进,直到满足设计指标为止。这种从设计到试验的不断反复过程带来的问题是周期长、成本高。除此之外,由于阀门结构尺度范围大,试验中对于某些特定组件不能给出定量的测量结果,对结构的修改往往是根据经验,盲目性很大。

近年来,随着计算机技术发展和广泛应用,国内外研究工作者尝试在阀门研制中采用仿真手段进行辅助分析。从国内外期刊上公开发表的论文情况来看,阀门静态特性的计算已比较成熟,即在适当简化的条件下可以解决稳定状态下出口压力、流量等问题,在给定流体载荷的条件下可以开展结构强度校验。

从调研资料情况来看,近几年国外对阀门动态特性的仿真工作也取得进

展,数值模拟发现阀门流道内部结构非常复杂,产生诸如旋涡、分离区和局部激波等非线性流动,这些流动现象是引发噪声、偏离设计工况、严重危害阀门安全的重要原因。比较而言,国内在这一领域的研究还较少,在国内阀门专业期刊上的论文主要是产品原理和结构设计介绍,关于研制经验的论文一般是针对“跑、冒、滴、漏”现象需求采取的工程措施,几乎没有看到考虑实际三维非定常流动的仿真结果和机理分析。

建立仿真手段除了可以缩短周期、提高研制效率外,对于出现故障以后的分析和定位也有非常重要的意义。例如,某次安溢阀试验系统运行过程中,发生振动鸣叫,严重时还导致阀门膜片破裂,整个系统失去功能。在发生故障以后,根据系统列出的故障树,发现进气管路走向、长度、进气口位置、入口法兰形状、内部进口管路、容器体积等影响阀门特性的因素众多,这些因素又相互交叉影响,这种情况下依靠试验来区分各因素对故障的影响大小需要设计数百个模型,即使如此,有些因素相互干扰,从目前能够实现的测量系统获取的试验数据中无法有效辨识出来,依靠试件的实物实验进行故障分析几乎不可能。这种情况下,有效的仿真手段可以分析各影响因素与故障之间的关联性,进一步复现故障模式,对于开展有效试验非常重要。

在火箭推进系统及其地面试验阀门系统开闭过程运动中,常引起压力和流量波动这样的动力学行为,这些动力学行为可能会产生有害的结构振动。更为严重的是大部分发动机和测试元件连接在复杂流动管路构成的动态试验回路上,在复杂的流动环境中,阀门和进排气管路耦合会引起在系统范围响应的严重压力扰动,进一步影响整个试验回路,严重时导致灾难性后果。下面以美国 Stennes 航天中心(SSC)的火箭发动机试车系统的两个例子来说明流固耦合数值模拟研究的重要意义。

文献[34]中作者针对在使用中出现的稳压阀异常振动现象,开展了非常细致的数值模拟,图 10.1 是实体模型和对称面网格,半模型的计算空间就采用了 70 多万六面体网格和近 90 万其他形状的网格,通过计算结果分析,证实试验中出现的低频振动是流动不稳定性引起的,其机理是流体在低压腔的阀座附近形成涡的周期性脱落,从图中迹线可以看出阀门内部流动的复杂性。

图 10.2 是现在还在 SSC 试验系统中使用的 6 英寸氢气进气阀的结构示意图以及数值模拟结果。文献[35]介绍,在一次液体火箭发动机试验中,进气阀开度调整到 52% 时发生异常自动关闭,导致整个试验系统关车。经过流体动力学仿真分析,发现阀门内部流动非常复杂,尽管进口马赫数仅为 0.11,但是在阀座附近非常狭小的空间区域也出现马赫数高达 2.8 的超声速,且该超

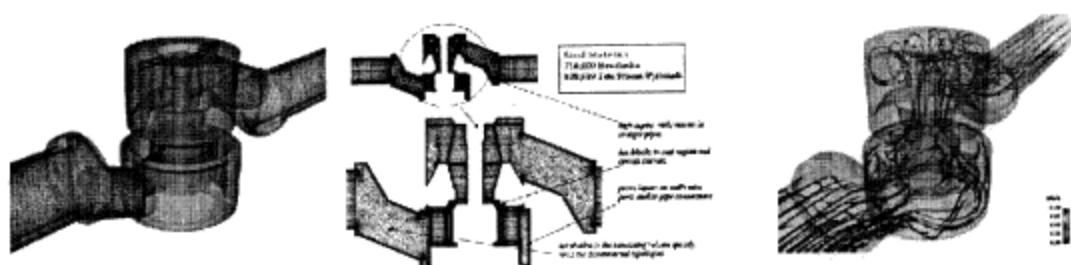


图 10.1 文献 [34] 中稳压阀模型、对称面网格和迹线

声速区域内还包含有交替出现的膨胀波和压缩波串（图中所示为马赫数分布）。超声速流动在这些复杂外形中产生激波，导致运动能和压力能转化，同时压力波动在一定开度情况下与阀塞空腔内形成共振，导致调整开度的阀塞上受到的气动力出现如图示意的周期性振荡，其中深色部分表示气动力大于调整阀塞开度的控制力，这一信息被系统监测到，发出关车指令。文献不但合理地揭示了故障机理，而且计算得到的振动频率与试验测量也较为一致，体现了数值模拟对于阀门动态特性研究的重要作用。



图 10.2 文献 [35] 中进气阀模型、对称面马赫数分布和阀塞轴向力

这种阀门开闭过程中的压力扰动不限于地面试验设备中，在航天飞机和 Delta-4 发射系统中也能观测到，Delta-4 氧化剂进气管中压力扰动引起的气化被传感器误判导致 RS-68 发动机的异常关车，大规模的压力扰动导致结构破坏，这已被航天飞机液氢气进气管中观测到的碎片证实<sup>[35]</sup>。

“目前阀门工作过程分析受到局限，大部分在获得定常状态性能特性曲线条件下，或者在基于系统管路的方程简化。这些分析没有考虑开闭过程中阀门运动和流动调节之间的非定常耦合效应”<sup>[35]</sup>。在以上文献的研究中，尽管得出了流动稳定性是主要影响因素的结论，但是，在数值模拟过程中物理外形和网格保持不变，把阀门维持在固定开度条件下进行模拟，并不能完整地体现实际应用中阀门开闭运动过程的动态特性。文献 [35] 中通过对 SSC 试验系统中还

在使用的 10 英寸液氧阀门的测量数据对比分析,发现操纵开闭过程可以明显改变性能特性曲线。测量得到的流量系数随开度变化,如图 10.3 所示。定常状态开闭过程的曲线是一样的,因此,图中包括每次达到稳定的定常状态、连续动态开阀和不连续动态关阀三条特性曲线。开度从 8.8% 调整到 48% 的开启动态过程,定常状态和给定压差条件下动态开阀的曲线存在明显差别,在达到 48% 开度以后,仅过一段延迟,两条曲线重合。开度从 68% 调整到 8.8% 的关阀过程,采用每次调整 10% 开度,达到稳定以后再继续关的不连续关阀方式,虽然关阀动态曲线相比开阀动态曲线与定常状态的差异相对较小,但是每个间隔也有类似的差异。可以看出,对于流量系数,动态开阀小于定常状态,动态关阀大于定常状态,如果结束动态过程,经过一定时间延迟,流量系数就调整到定常状态值。对于所讨论的 10 英寸液氧阀门,“延迟特征时间主要取决于阀门几何形状和管路系统”。实际上,对于气体阀,开闭阀门的速度也是延迟特征时间的重要影响因素。文献 [35] 中也讨论了阀塞运动速度对流量系数的影响,给出分体阀开阀速度每秒 10 英寸和 1 英寸条件下的流量系数、进出口压力和流量等评价参数曲线,发现速度越大,与定常状态的差异越大。

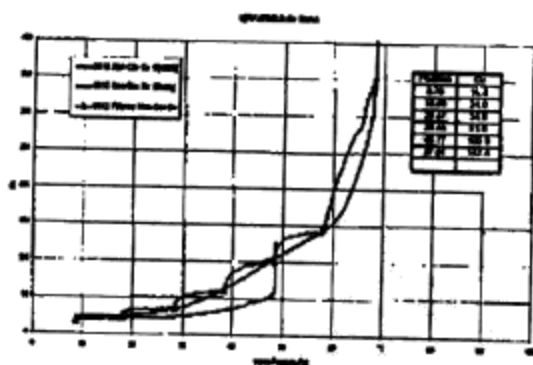


图 10.3 阀门开闭过程特性曲线

由于模拟阀门运动问题的计算方法还不成熟,目前看到的文献很少进行开启过程的数值模拟。文献 [36] 中采用一种允许在开关过程中使用不同结构网格的独特处理技术模拟运动阀门。这种处理阀门运动的技术需要在阀门位移曲线事先确定条件下,每次改变 10% 阀门位置生成一套网格,建立网格数据库。求解过程中根据位移从数据库选择网格,相邻位置网格之间的运动采用服从弹性体方程控制的弹性体模型通过网格变形来模拟。不同开度下网格和计算得到的速度分布如图 10.4 所示,由于没有很好的从密闭到开启计算区域拓扑变化引起网格问题的处理方法,文中计算的最小开度为 40% 行程,不能模拟实际

应用中阀门开度从零开始的动态过程。

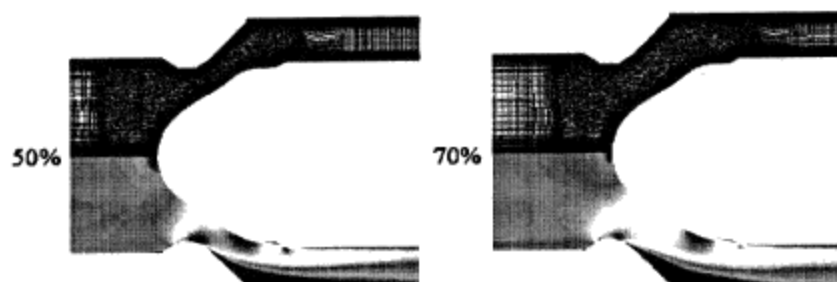


图 10.4 文献中模拟阀门开闭过程的网格和速度分布

以上文献模拟阀门开启过程的位移曲线事先确定，但是，在大部分自动阀门中，阀门位移是系统内部自动反馈的结果，例如，本书下面讨论的安逸阀，其开度是进气、排气和阀门内部弹簧力相互作用的结果，这些因素本身又受到开度的影响，很难事先给出开度曲线。因此，在阀门动态过程模拟中需要考虑流固耦合问题。

目前，在阀门设计中广泛应用的仿真手段是在得到阀门流场特性以后，进行结构强度效验。图 10.5 是油田生产中使用的—种高压阀门，其设计通径为 82mm，使用时内部压力高达 16MPa，在完成设计方案以后，根据流体仿真提供的载荷，采用 ANSYS 软件进行了三维有限元强度分析，然后针对设计原型进行结构优化设计，使得优化后的阀门最大应力降低达 20%。在这个流固耦合算例中，采用 ANSYS 进行管道的结构分析时，流体载荷是作为已知条件事先给定的。由于启动、关闭、振动等过程中流动表现为非定常，有时流动特性与阀门内部结构部件的运动相互影响，流体载荷难以事先确定，这时流固耦合效应必须考虑，仅用 ANSYS 软件分析结构不能反映动力学系统中流体的动态特性。



图 10.5 ANSYS 分析井口高压阀门应力

阀门内活动元器件在流体介质作用下运动和变形,运动中元器件质量有惯性力,运动件和固定件之间还有摩擦阻力,结构变形与气动力交互作用产生气动弹性现象,阀门动力学系统机理复杂、动态特性高度非线性,描述其过程涉及流体力学、结构动力学、固体力学等学科相互交叉,在非定常流固耦合动力学系统分析手段不完善的情况下,动态特性研究还是以设计试件实物的实验测量为主。

## § 10.2 安溢阀门的动态特性仿真研究

气动安溢阀是一种能够依靠气体本身的能量自动开启和关闭从而使容器内气体压力保持稳定的机械装置,广泛应用于航天飞行器燃料箱压力保持和地面试验设备,起着重要的控制和调节作用。

根据敏感元件的不同,安溢阀分为膜片式、柱塞式和膜盒式三种。下面研究的膜片式安溢阀是采用薄膜片将阀门腔分成两部分,一部分直接与容器相连,另一部分则与指挥阀相连。膜片通过硬芯与主活塞固连,关闭状态时膜片两侧压力相等,膜片所受合力很小,主活塞在弹簧弹力作用下关闭阀门出口;当容器内压力超过额定值时,指挥阀动作,使膜片一侧腔内气体泄压,膜片所受合力剧增,克服弹簧弹力打开主活塞放气,使容器内压力恢复额定值。膜片是安溢阀的关键零件,当其受力时产生弹性变形,在开阀和闭阀过程中甚至经受高频振荡,因此膜片应具有良好的弹性、抗拉、抗疲劳、抗老化、耐油、屈服限大、表面光滑等质量指标。

### § 10.2.1 工作原理

安溢阀门基本结构和实体模型如图 10.6 所示(关闭位置),包括指挥阀和主阀两部分,这两个阀门的结构相似,包括弹簧、隔离膜片、活塞、定位杆等元件。指挥阀的膜片把内部容积分开,一侧和主阀腔侧壁相通,感受主阀腔内的压力,另一侧通过在背压腔壳体上的开孔感受环境压力,一般情况下阀门工作环境压力远小于气瓶压力,主阀腔与卸压腔之间有可开闭的环缝,卸压腔与外界环境之间采用阀塞和阀座结构控制开闭,卸压腔经过反馈管与主阀的背压腔(A腔)连通。主阀腔的进口管连接容积较大的气瓶,外接进气管路不断充气。在气瓶内气体压强较低的情况下,指挥阀膜片两侧压差不足以驱动弹簧,

主阀腔（B腔）与背压腔（A腔）连通，主阀的膜片两侧压差很小，主阀活塞在主阀弹簧、B腔与环境气压差作用下处于关闭位置。随着不断充气，瓶内气压不断增大，指挥阀膜片两侧压力差产生的气动力大于指挥阀弹簧的弹力，驱使指挥阀动作，阀塞提升运动关闭了环缝，切断A腔与B腔的连通，同时打开卸压通路，使与A腔连通的泄压腔内压力降低，主阀膜片两侧（A腔和B腔）的压差增大，如果产生的气动力克服主阀弹簧的弹力，就会驱使主阀的活塞运动，安溢阀门进入开启状态，气体排出。假如在安溢阀门开启以后停止向气瓶充气，排气必然导致气瓶和主阀腔压降低，指挥阀膜片两侧压差小到无法平衡内弹簧的弹力时，指挥阀的阀塞运动，恢复初始位置，重新连通A腔与B腔，主阀回到关闭位置。

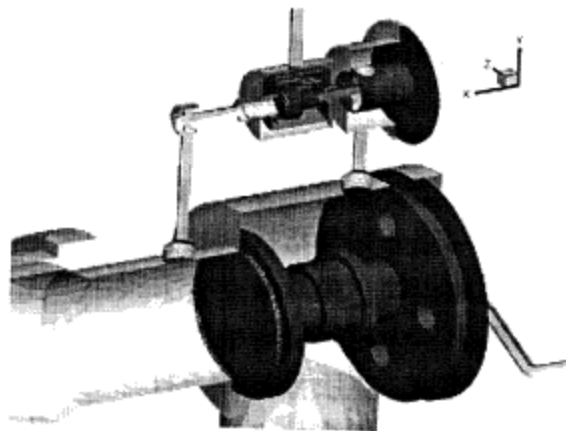
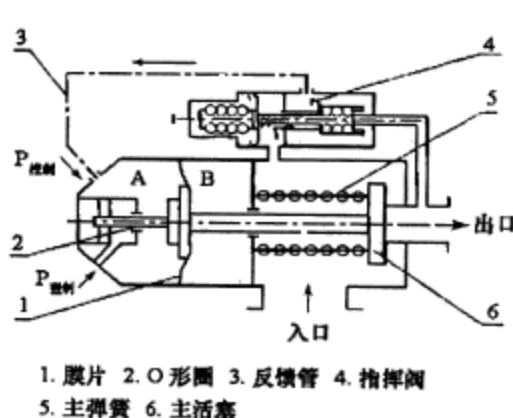


图 10.6 安溢阀门工作原理示意图

理论上进气流量越大，主阀活塞的开度越大，排气流量也大，如果维持进气流量等条件和环境压力不变，最终能够达到稳定状态，这时进气流量等于排气流量，主阀和指挥阀的活塞上的作用力平衡，位移保持为固定值。但是，由于内部复杂外形产生的流动不稳定、启动和关闭过程中的结构运动、湍流噪声等扰动，实际上很难达到这种理想的稳定流动状态，阀门工作过程中流动及其作用力是非定常，采用准定常假设对流体和固体解耦处理方法开展动态特性研究不再合适。在设计完成以后，需要了解工作过程中气体载荷以及气动力激励下安溢阀门结构产生的动态响应，尤其关心开启和关闭的动态过程。

为此，应用前面介绍的非结构动网格计算方法，结合结构动力学模型，对阀门开闭动态过程进行仿真，通过动力学系统的流固耦合机理分析，排查影响膜片受力的主要因素，从而指导安溢阀延寿改进设计，提高可靠性。

### § 10.2.2 弹性敏感元件的结构分析

主阀和指挥阀内的弹簧、膜片、密封环、主硬芯等组成一个质量—弹簧—阻尼系统，在气动力作用下运动，同时还受到摩擦等阻尼力。由于气动力和阻尼力是非保守力，根据膜片的材料特性和结构特点分析，膜片位移引起的内应力很大，可能超出其屈服限进入非线性变化的塑性区，活塞向下运动与出口发生撞击，向上运动达到限程后轴心杆与顶部发生碰撞，这些因素导致这一系统运动是一非保守系统动态过程，而且存在明显的非线性特性。

安溢主阀和指挥阀的膜片组件如图 10.7 所示，膜片通过上下两侧支撑硬块与活塞固定连接，在受内外压力差作用下的活塞运动过程中，膜片与上支撑硬块之间的接触面是变化的，因此膜片的刚度也处于变化之中，构成的质量弹簧系统是非线性的；膜片受到的气动力来自主阀和指挥阀内部流场变化，内部流场除了受进口压力和出口压力影响外，阀门内部腔体容积变化也有影响。对于这种流场与运动器件耦合问题，目前看到的计算流体力学或计算固体力学专业软件，如 ANSYS、FLUENT、CFX、Numeca、Phoenix、Star - CD、FASTRAN 等商业软件，并不能很好地解决。

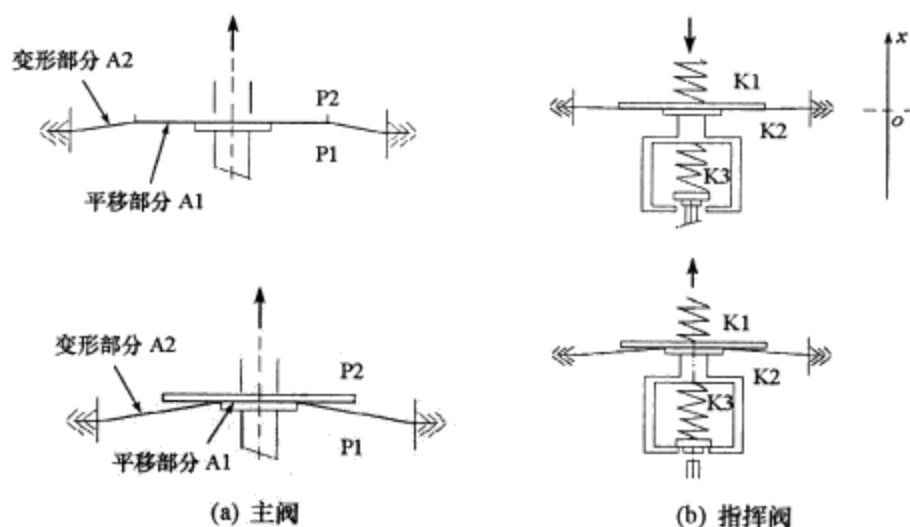


图 10.7 开闭过程中膜片与支撑的接触示意图

在流动模拟中直接耦合有限元程序计算膜片存在如下困难：

(1) 考虑到膜片厚度很薄，当横向位移较大时，膜片横向刚度产生应力强化效应；

(2) 膜片的横向位移较大时, 可能使膜片内部应力超过屈服限, 因此膜片材料采用弹塑性模型来描述;

(3) 由于膜片与上固定片之间的边界条件不易确定。

根据系统特点, 在主阀结构分析过程中采用以下简化:

(1) 将膜片看成非线性弹簧: 膜片厚度很薄, 当位移相对其厚度较大时, 需要考虑大位移效应 (几何非线性), 采用弹塑性模型来描述膜片的应力应变关系, 膜片位移和膜片提供的变形力之间的关系是非线性的; 膜片与上支撑硬块之间的接触面表现出非线性刚度。弹簧非线性刚度  $K_2$  与位移的变化曲线采用有限元法计算得到。

(2) 活塞与出口撞击用弹簧模型描述: 活塞向下运动, 活塞平面与出口管壁撞击过程中, 接触→压缩→回弹→脱离, 采用弹簧模型通过活塞面位移计算其受到的反力, 当活塞与出口脱离接触时, 不再有弹簧力。弹簧刚度  $K_3$  根据活塞面塑料垫圈材料得到。

(3) 轴心杆与顶部碰撞也用弹簧模型描述: 阀门开启时, 如果气动力足够大, 向上运动达到限程后, 轴心杆与顶部发生碰撞, 采用弹簧模型通过位移计算反力, 当回弹后脱离接触, 不再有弹簧力。计算中弹簧  $K_4$  刚度取得非常大。

这样一来, 主阀系统的运动方程写为:

$$M\ddot{x} + Kx + c\dot{x} = Q \quad (10.1)$$

系统质量:  $M = M_0 + \frac{M_1}{3} + M_2$ , 其中,  $M_0$  是除膜片和弹簧外活动元件的质量, 包括活塞杆、膜片两侧支撑硬块、垫片等, 计算过程保持不变;  $M_1$  是弹簧质量, 由于弹簧沿运动方向各点质量产生的惯性力不同, 为便于处理, 整个弹簧等效为最大位移点 (顶点) 处质点, 该点等效质量仅为  $M_1$  的三分之一;  $M_2$  是膜片等效质量, 由于膜片与上支撑硬块接触情况是变化的, 计算中把膜片与上支撑硬块分为贴合和脱离两种状态, 贴合时按照上支撑硬块对应的膜片面积计算  $M_2$ , 脱离时按照下支撑硬块对应的膜片面积计算  $M_2$ 。

系统刚度:  $K = K_1 + K_3 + K_4$ , 其中  $K_1$  为主阀的弹簧刚度, 已知为固定值; 嵌入活塞座的环形塑料垫片, 在活塞与出口处管口接触时, 将挤压变形, 设活塞向上运动为正位移, 关闭状态的位置为初始位置  $x = 0$ , 假设挤压变形较小, 可以采用弹性模型来描述, 塑料垫片的弹性模量  $E = 80\text{MPa}$ , 泊松比  $\sigma = 0.4$ , 采用 ANSYS 软件计算得到活塞面塑料垫圈变形刚度:

$$K_3 = \begin{cases} 18.82 \times 10^6 \text{ (N/m)} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

活塞轴心顶部撞击变形刚度:

$$K_4 = \begin{cases} 3.14 \times 10^9 \text{ (N/m)} & x > L_4 \\ 0 & x \leq L_4 \end{cases}$$

这里  $L_4$  是活塞运动的上限程。

$c$  为密封环阻尼系数, 在轴心杆运动速度不是非常大的情况下, 可以认为阻尼是线性的, 即阻尼力与速度成正比, 阻尼系数是常数。

系统受到的作用力:

$$Q = F_1 + F_2/\xi + F_H - K_1 L_1 + K_4 L_4 - F_s(x)$$

如图 10.7 所示, 膜片与上支撑块贴合的平移部分 ( $A_1$ ) 压力差为  $\Delta p_1$ , 积分以后得到  $A_1$  的气动力为:  $F_1 = \int_{A_1} \Delta p_1 dA$ ; 膜片与上支撑块脱离变形部分

( $A_2$ ) 压差  $\Delta p_2$ ,  $A_2$  的气动力为:  $F_2 = \int_{A_2} \Delta p_2 dA$ , 面积  $A_1$  和  $A_2$  体现膜片与上

支撑硬块接触面积, 随着活塞位移线性变化。由于作用在  $A_2$  上的分布力有一部分转化为膜片的变形运动, 因此传递到以上系统的力需要除以折算系数  $\xi$ , 假定膜片位移沿径向线性变化, 根据广义力的定义, 可以推导出完全贴合时  $\xi = 2.1$ , 完全脱离时  $\xi = 2.5$ 。 $F_H$  为活塞面和轴心杆的气动力。膜片装入阀门腔内, 在上支撑硬块的作用下产生预变形  $L_1$ , 弹簧产生的恢复力  $K_1 L_1$ ; 与此同时, 膜片内变形将产生相应的应力, 在计算膜片的刚度以及膜片受力时需要考虑膜片的预变形, 体现在膜片 (Slice) 变形后的反力  $F_s(x)$  中。

本书中采用 ANSYS 软件分析膜片变形反力  $F_s(x)$  与位移  $x$  的关系。ANSYS 软件计算过程中, 根据主阀结构特点, 有限元建模时分为如图 10.8 示意的三部分:

(1) 主膜片, 严格按照零件的几何、材料参数建模, 计算中膜片与上支撑硬块可分离, 采用接触单元来模拟膜片与上支撑硬块接触支撑或自由分离, 膜片采用适用于薄壳结构的壳单元模型离散, 可以计算材料的塑性大变形。

(2) 支撑硬块和轴芯杆为一个整体, 为便于划分网格, 把上下两个支撑硬块合并, 这部分质量近似等于系统的惯性质量 (由于  $M_1 + M_3 \gg M_2$ ), 支撑硬块的刚性取得非常大, 认为运动中没有变形。

(3) 用来限制轴芯杆在弹簧力、气动力作用下向下运动的下限位体是排气

管,建模时也进行简化,为塑料材料。

轴芯杆等活动件在如图 10.9 所示的气动力载荷和弹簧力作用下沿轴向运动,引起膜片变形及运动,计算中不考虑气动载荷分布的不均匀性。

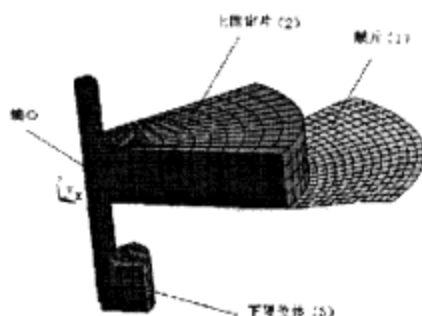


图 10.8 有限元模型

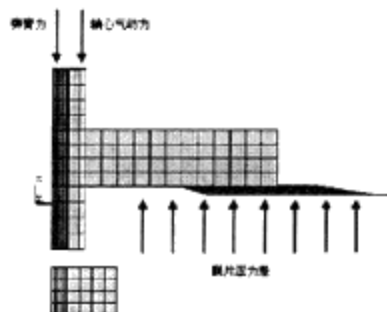


图 10.9 模型受到的激励力

计算中钢膜片参数:泊松比  $\sigma = 0.3$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 屈服限  $\sigma_{y0} = 800\text{MPa}$ , 屈服后切向模量  $E_t = 1\text{GPa}$ , 塑性模型采用率无关的各向同性硬化模型。对于厚度为  $\delta = 0.08\text{mm}$  的膜片, 运动过程中不同时刻膜片变形如图 10.10 所示。

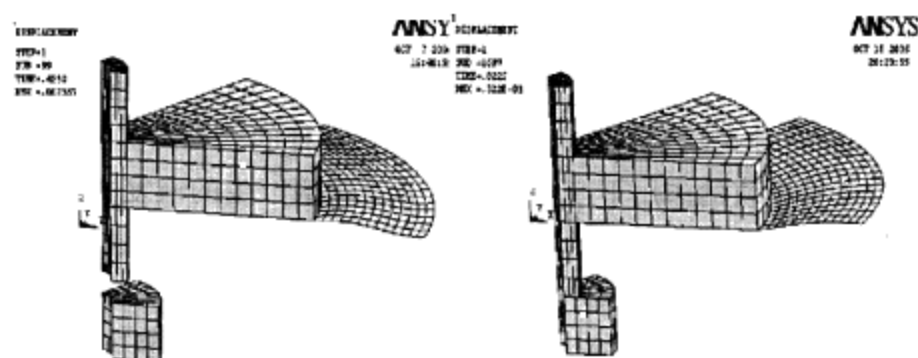


图 10.10 膜片变形

从初始位置  $x = 0$  开始逐步增加到最大位移  $x_{\max}$ , 在运动过程中同时计算膜片变形反力  $F_s(x)$  和位移。厚度为  $\delta = 0.08\text{mm}$  的平膜片, 在贴合和脱离两种状态下, 膜片的初始位移和最大位移时形状如图 10.11 示意, 膜片变形反力  $F_s(x)$  随位移  $x$  变化关系如图 10.12 示意。

可以看出, 当位移较小时, 两种状态膜片的反力都很小, 当位移超过一定值以后, 反力随位移增加而单调上升, 在同样位移条件下, 贴合状态比脱离状态的值要大很多, 达到最大位移时, 前者达到  $3\ 100\text{N}$ , 后者仅为  $380\text{N}$ , 出现

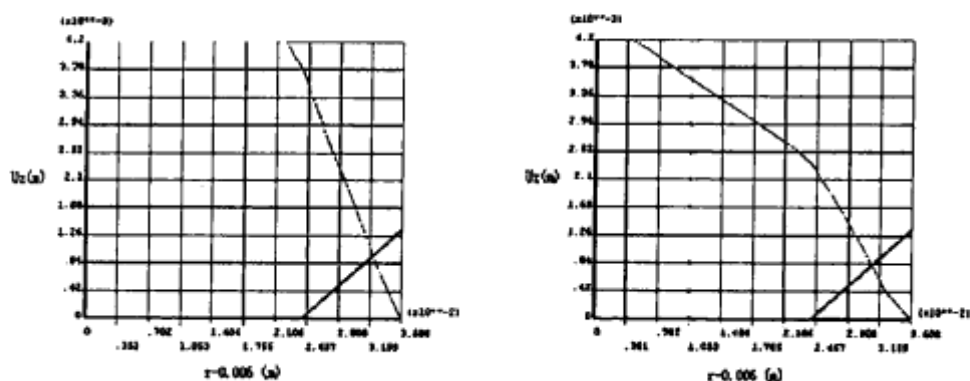


图 10.11 贴合和脱离状态下膜片形状

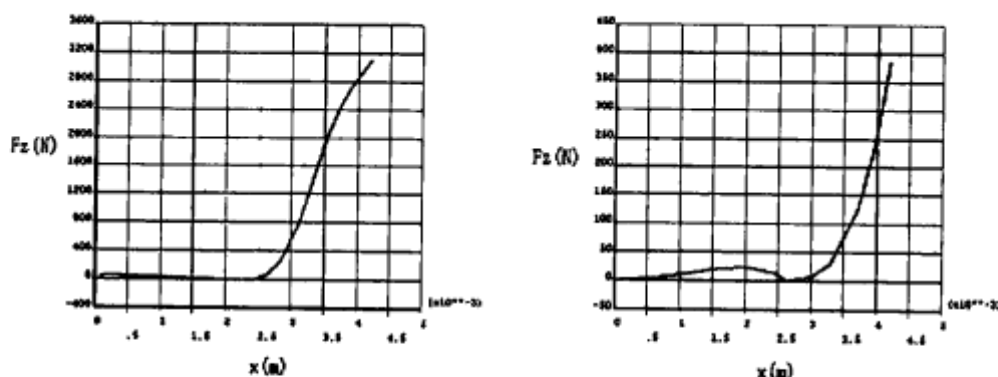


图 10.12 贴合和脱离状态下膜片变形反力

这种现象的原因是在贴合状态下，膜片上受到上支撑硬块的过分约束。根据系统能量最小观点，认为脱离状态更接近于实际情况，所以，后续的流固耦合计算中膜片刚度取脱离状态的结果。从图 10.12 来看，在局部区域都出现了膜片的反力随着位移增加而下降的现象，其中脱离状态非常明显，这是由于膜片的预变形所引起的，在位移增加过程中，膜片由下凹变为上凸，其间将会出现负刚度现象。

脱离状态下改变膜片厚度  $\delta = 0.1\text{mm}$  和  $\delta = 0.05\text{mm}$  时，膜片的反力随着位移变化曲线如图 10.13 所示，膜片刚度随膜片厚度的增加而增加。

在膜片反复开闭过程中，处于塑性状态的膜片内部发生错位、滑移、微观裂纹等损伤，最终可能导致膜片发生结构破坏。为了避免膜片横向位移较大使内部应力超过屈服限，考虑采用波纹膜片形式，即在膜片径向从上支撑硬块到阀门内腔一半的位置压制半圆形环状波纹，膜片厚度取为  $\delta = 0.1\text{mm}$  和  $\delta = 0.05\text{mm}$  时膜片的反力随着位移变化曲线如图 10.14 所示，与同等厚度的平

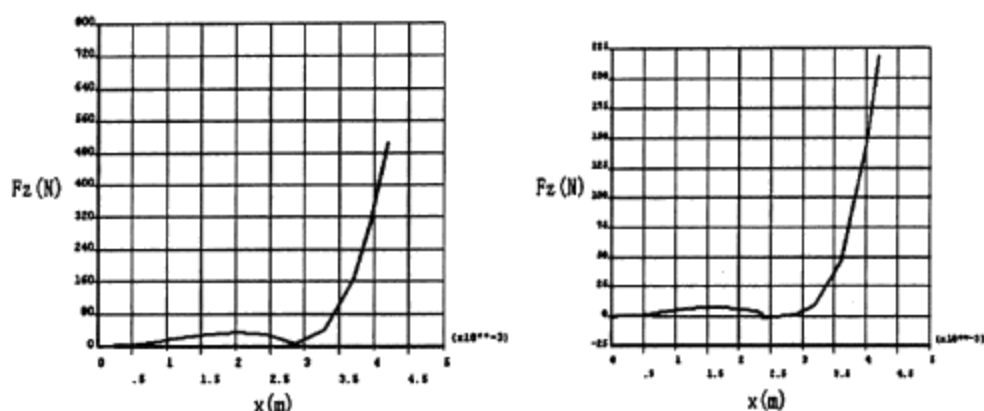


图 10.13 膜片厚度对刚度的影响

膜片相比，波纹膜片刚度要小，且变化规律更为平缓。

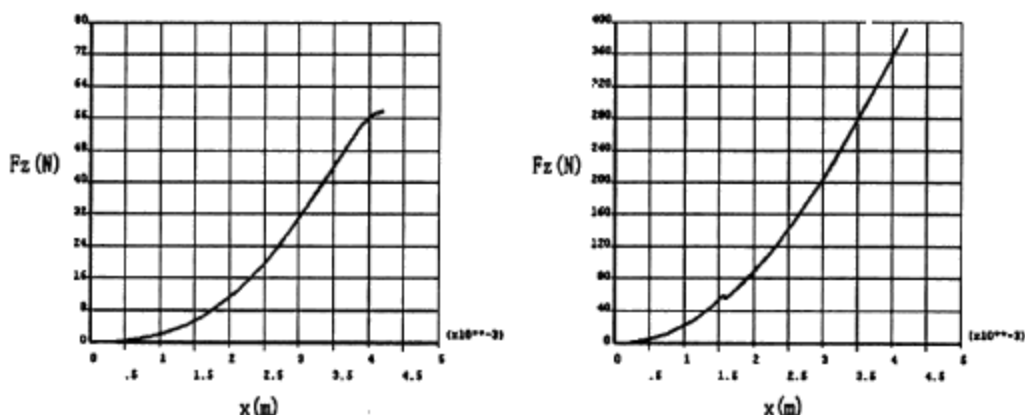


图 10.14 波纹膜片变形反力与位移变化规律

为了计算安溢阀门中主阀的固有频率特性，不考虑气动力的激励作用，施加一个扰动后考察振动曲线。以最大位移  $x_{\max}$  和速度  $v = 0$  作为初始条件，采用纽马克方法求解。由于密封环等阻尼系数很难实测出，计算中认为给定，同时考察阻尼系数的影响。对于厚度为  $\delta = 0.08\text{mm}$  的平膜片，计算得到的响应特性如图 10.15 所示，阻尼参数对动态特性有较大影响，阻尼越大振幅衰减越快，如果阻尼进一步增大，就出现无往复运动的过阻尼情况。变化趋势与前面第八章的单自由度系统的理论定性一致。

考察阻尼  $c = 1$  的算例，由于活塞与出口碰撞、轴心杆与顶部碰撞运动受到限制，加上膜片刚度非线性，系统的振动频率是变化的，按照两次通过平衡位置的时间差来近似运动周期，估算的频率从  $149.25\text{Hz}$  变化到  $1587.30\text{Hz}$ 。阻

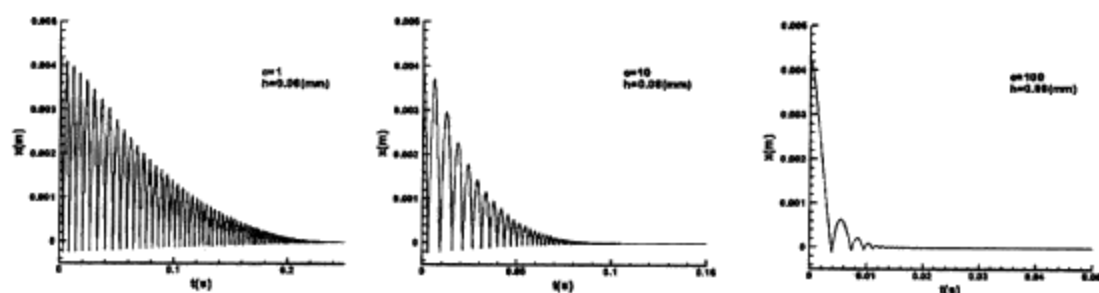


图 10.15 主阀的固有频率特性

尼增大两个量级，频率变化范围不大，主要原因是运动距离较小时，阻尼引起的耗散能小。改变膜片厚度  $\delta = 0.1\text{mm}$  和  $\delta = 0.05\text{mm}$  以后计算发现，系统振动频率的范围几乎无变化，其原因是振幅很小时，膜片刚性几乎可以忽略。

指挥阀结构如图 10.7 所示，建模过程和以上主阀类似：

(1) 将膜片看成非线性弹簧  $K_2$ ，采用 ANSYS 软件计算主阀膜片位移变形与反力的关系曲线，如图 10.16 所示。

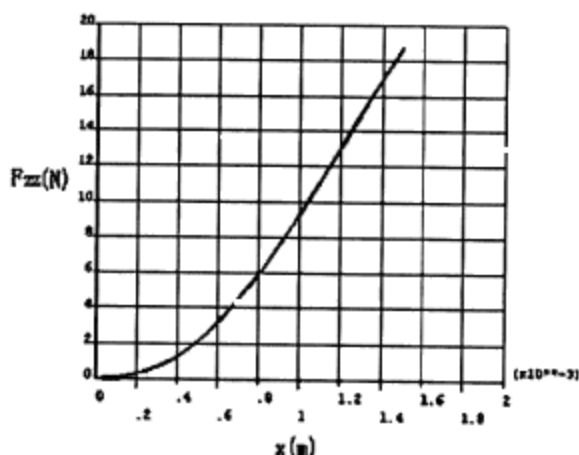


图 10.16 膜片变形反力曲线

(2) 拉套内部小弹簧  $K_3$  在阀门关闭状态有预压缩量，开启过程中逐步伸长，当阀门向上运动到一定位置时，弹簧不再伸长，拉套携带弹簧一起运动，因此，弹簧的作用力随时间变化。

(3) 阀门的运动达到上限程，与顶部发生碰撞，用刚度很大的弹簧  $K_4$  描述碰撞过程，当回弹后脱离接触，不再有弹簧力。

(4) 拉套向下运动，活塞与排气出口接触后，不再进一步移动，用弹簧  $K_5$  描述位移限制和碰撞过程。

(5) 同样引入阻尼系数  $c$  来描述系统运动摩擦力等阻尼力。

(6) 经过估算, 内部弹簧的预压量为 5mm。

采用纽马克方法计算指挥阀的固有频率特性时, 不考虑气动力的激励作用, 以最大位移  $x_{\max}$  和速度  $v = 0$  作为初始条件, 在位移随时间变化曲线中两次通过平衡位置的时间差为运动周期, 周期倒数为频率。取不同阻尼参数计算得到的响应特性如图 10.17 所示, 对动态特性有较大影响, 阻尼越大振幅衰减越快, 膜片刚度非线性, 系统运动频率是变化的, 阻尼系数  $c = 1$  时, 系统最低频率 575.0Hz 对应大振幅情况, 最高频率 41666Hz 对应小振幅情况。

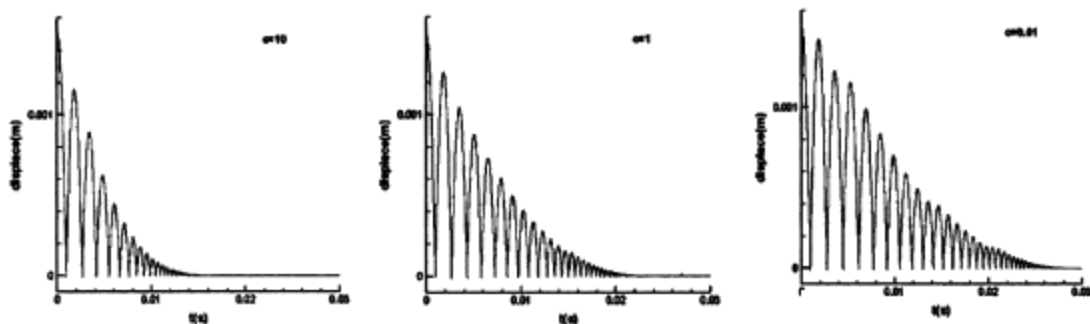


图 10.17 指挥阀的固有频率特性

阻尼系数对系统频率范围影响较小, 随阻尼减小, 最低频率变化不大, 最高频率略有增加。

### § 10.2.3 整阀动态特性的流固耦合模拟

按照真实外形进行几何建模, 包括主阀、指挥阀和连通管, 整阀表面网格和指挥阀局部表面网格如图 10.18 所示。为了模拟主阀活塞和指挥阀活塞由紧密关闭到开启的过程, 仍然采用了虚拟挡板技术。根据所能承受的最小网格尺度, 在网格生成时人为地在主阀活塞与排气口之间布置了一个宽度为 1.6mm 的虚拟挡板, 在指挥阀内小活塞处也布置了两个 1.0mm 的虚拟挡板。指挥阀活塞处直径较大的虚拟挡板控制指挥阀与背压腔之间的连通, 直径较小的虚拟挡板实现背压腔与出口之间的连通。由于指挥阀拉杆拉套与衬套之间是滑动间隙配合, 存在漏气量, 在指挥阀与背压腔之间保留一个等效通气缝隙的宽度设为 0.014mm 的虚拟挡板实现对该漏气量的模拟。

动网格计算中弹性敏感元件的运动规律采用如下的处理: 当主活塞开度小于 1.6mm 时, 由虚拟挡板部分通气模拟真实开度, 此时虚拟挡板网格不动,

主活塞的前端面（出口一侧）设定为固定不动；当主活塞开度大于 1.6mm 时，虚拟挡板全通气并随着活塞运动作拉伸动网格处理，主活塞的前端面也按计算出的位移作平动。主活塞的后端面（阀腔一侧）始终按照计算得出的活塞位移作平动。

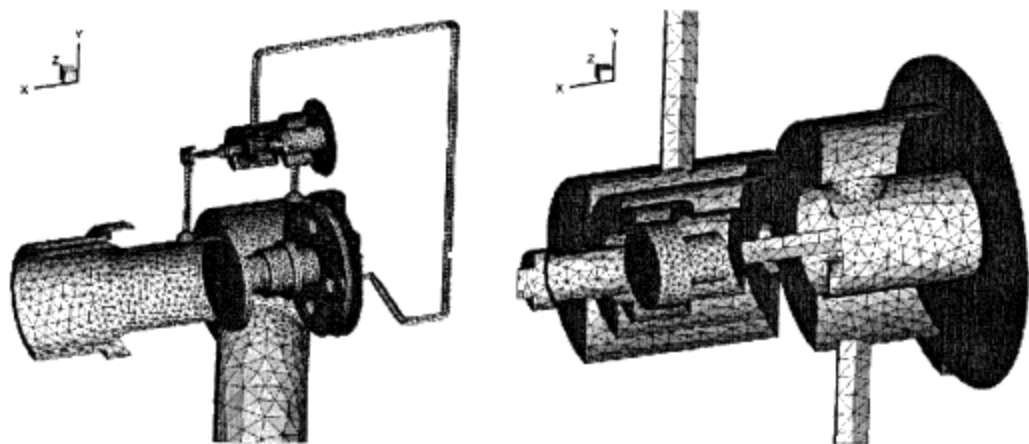


图 10.18 整阀表面网格和指挥阀局部表面网格

主膜片被硬芯和压板覆盖的部分及硬芯也按活塞位移作平动，主膜片在压板以外的部分则沿径向作线性变形。指挥阀内由于拉套与右壳体间的空间较小，作动网格处理容易导致质量较差的网格出现，并且拉套的运动不会导致右壳体内体积的变化，因此在指挥阀内仅对小膜片作动网格处理。小膜片的运动规律是沿径向作线性变形。图 10.19 中左侧两图是主阀和指挥阀对称面初始网格（关闭状态），右侧两图是主阀和指挥阀达到最大开度时对称面网格，由图可也看出元件的运动和膜片的变形对容积较小的背压腔的影响。



图 10.19 主阀和指挥阀关闭状态和开启状态的网格

流固耦合计算仍采用松耦合方式，即在同一时间步内先计算流体模块，得到结构运动所需的气动载荷并传递给结构计算模块；然后计算结构模块，得到运动部件的位移和速度，根据运动件的位移进行动网格模块的计算并得到新的

活塞开度；再计算流体模块，依此循环。由于指挥阀的运动状态也由质量弹簧模型控制，实现了指挥阀自动通断功能，因此计算中充气、开阀、关阀过程完全是与实际情况一样。计算初始状态对气瓶充气，当阀腔内压力增加到一定程度，指挥阀自动发挥作用，实现背压腔放气，使主阀开启；计算关阀过程时切断进气口的流量，主阀腔压力降低，指挥阀自动复位，实现背压腔充气，使主阀关闭。

计算中记录了主阀和指挥阀运动件的位移、速度、加速度以及所受合力，主膜片和指挥阀膜片受力等。图 10.20 是主阀和指挥阀运动件（活塞的）位移随时间变化历程，图中显示的是从容器充气到主阀开启再到主阀关闭的全过程，为了说明阀门动作的时序，将全过程分为不同的阶段，对应的阀门运动情况说明如下：

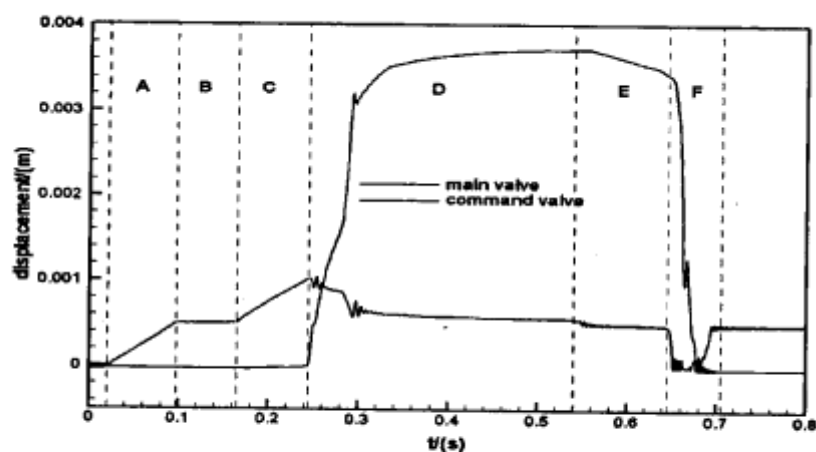


图 10.20 主阀和指挥阀的位移曲线

(A) 指挥阀拉杆拉套开始运动，但尚未接触到小活塞；主阀活塞呈关闭状态。

(B) 指挥阀拉套接触到小活塞，但压力尚未增大到拉开小活塞的程度，指挥阀处于等待状态；主阀活塞呈关闭状态。

(C) 阀腔压力增加到足够大，指挥阀拉套拉开小活塞，位移继续增大，背压腔的气体排出；主阀活塞呈关闭状态。该阶段的时间跨度即为指挥阀开启时滞。

(D) 背压腔气压下降到足够低，主阀活塞在气动载荷的作用下开启，开度逐渐增大，直到平衡位置；主阀开启导致主阀腔压力瞬时降低，指挥阀拉杆拉套回弹，并逐渐稳定在一个位置。

(E) 该阶段切断了容器的进气，由于排气口仍在排气，导致阀腔压力逐

渐降低,主阀位移有少量回落;指挥阀拉杆拉套位移也回落,拉套将小活塞放回小阀门座上,小活塞与小阀门座若即若离,等待阀腔压力进一步降低。

(F) 阀腔压力降低到足够低,小活塞落回小阀门座上,将背压腔排气通道关闭;拉杆拉套位移继续回落,拉套离开小活塞,将背压腔与主阀腔连通,背压腔充气,主活塞随即关闭。

可见,数值模拟的计算结果捕捉到了阀门启闭过程中弹性敏感元件的运动细节,由数值结果可分析阀门动态特性。

为了获得流场的详细情况,在阀腔内设置了压力观测点,计算发现主阀腔内部和这一侧膜片表面不同位置的压力曲线基本相同,随时间的变化规律如图 10.21 所示,由图可见,主活塞在开启瞬间、关闭瞬间以及开度达到平衡前主阀腔压力均出现波动,尤其是主活塞关闭瞬间,由于气锤作用,压力波动比较激烈。主阀背压腔内部和该侧膜片表面不同位置的压力也基本相同,随时间的变化规律如图 10.22 所示,图中纵轴刻度与图 10.21 不同,实际上到 B 段之前,背压腔和主阀腔压力相差较小。以上两图可以看出主阀开启和关闭前背压腔内卸压和增压过程,由于流动在指挥阀和连通管内时间延迟和细长管路的整流抑制作用,主阀关闭瞬间的压力振荡没有传播到背压腔。与主阀腔相通的指挥阀壳体内压力随时间的变化规律如图 10.23 所示,在主阀开启阶段和主阀关闭前都与主阀腔压力十分接近,但在主活塞即将快速向关闭方向运动时(E 区和 F 区的交界处),指挥阀内的压力与主阀腔压力出现了很大不同。在 E 区和 F 区的交界处,主活塞关闭的速度突然增大,主阀腔形成气锤,压力振荡升高;主活塞向下运动使得背压腔容积增大,这一扰动通过导管传播到指挥阀腔内,表现为压力急剧降低,然后随着主阀腔高压气体的补入,压力振荡升高。

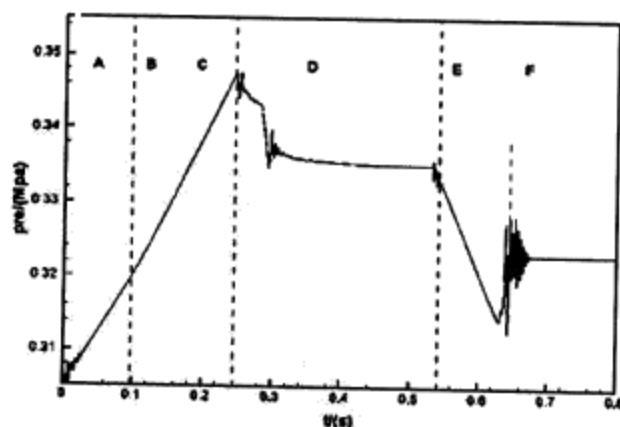


图 10.21 主阀腔压力

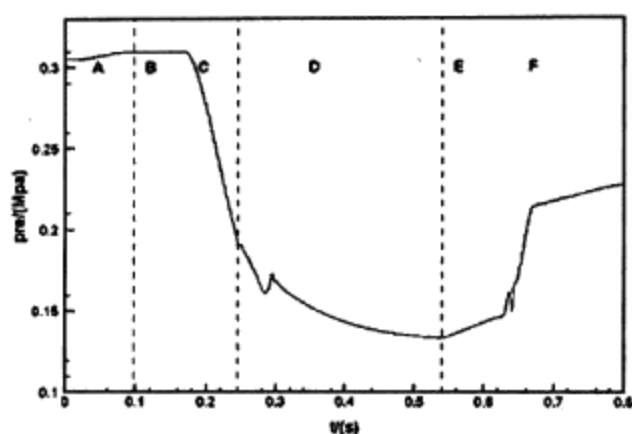


图 10.22 背压腔压力

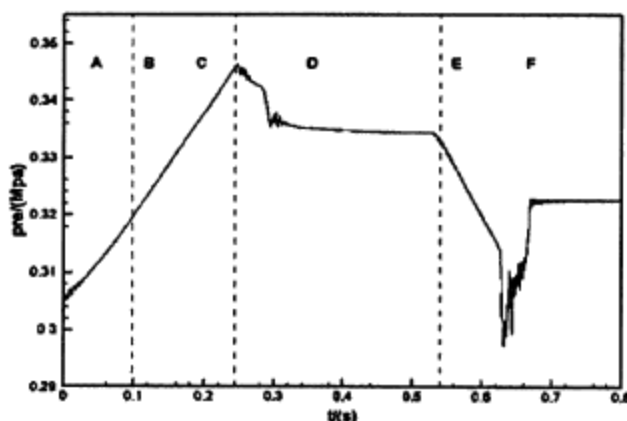


图 10.23 指挥阀内腔压力

图 10.24 是指挥阀运动件所受气动力随时间的变化历程，以开阀方向为正。由于气动力是压力积分的直接结果，因此该曲线与图 10.23 所示测点压力走向规律一致。值得注意的是，在 B 区指挥阀处于等待状态阶段气动力曲线呈等幅振荡状态，这主要是指指挥阀拉套和小活塞接触算法引起的。因为在指挥阀拉套接触到小活塞之前，小活塞上的气动力对拉套运动没有贡献，不包括在指挥阀运动件所受的气动力中；当拉套接触到小活塞后，小活塞成为运动件的一部分，其气动力应该包括在运动件所受气动力中。计算中以 0.5mm 作为判据，当位移大于该值时运动件的气动力包括小活塞贡献，因此当拉套处于刚刚接触小活塞的临界状态时，气动合力会出现跳变，B 区正好是这样的状态。曲线上 C 区的起点应该比 A 区的终点高，这是指挥阀小弹簧的预压缩力。关阀阶段的 E 区现象与 B 区类似，是 B 区的逆过程。

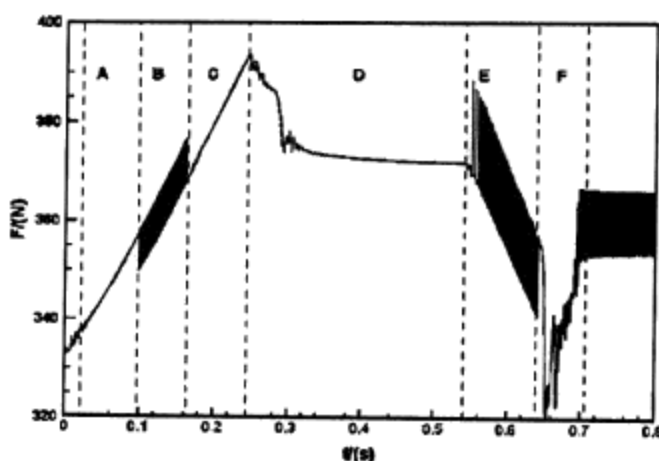


图 10.24 指挥阀受到的气动力

图 10.25 是主阀运动件气动力随时间的变化历程，以开阀方向为正。由于主阀背压腔压力变化幅度远大于主阀腔，是影响主阀运动件气动力的主要因素，因此该图曲线与图 10.24 所示测点压力曲线形状相似，符号相反。

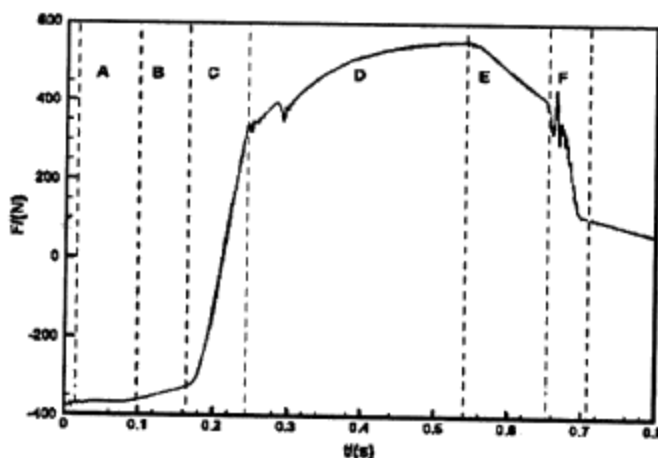


图 10.25 主阀受到的气动力

#### § 10.2.4 部分结构参数对安溢阀门动态特性的影响分析

在以上流固耦合模拟基础上，对主阀腔容积、背压腔容积、指挥阀小壳体容积、连通管路通气截面积、膜片支撑硬块直径、排气出口直径、主活塞端面形状和拉杆拉套漏气量等结构尺寸对动态特性的影响进行研究，具体数据不再

详细介绍, 仅将根据计算信息比较得到结论直接给出如下:

(1) 通过改变进口管路直径增大主阀腔容积的措施对动态特性没有明显改进, 由于进口流量增大使气锤效应略有加剧, 主阀腔压力极值绝对值比图 10.21 增大。由于指挥阀敏感主阀腔压力, 出现较强气锤效应往往导致不必要的动作响应。

(2) 主阀背压腔容积和连通管路直径对阀门振荡特性影响甚微, 但使得指挥阀响应时间延长。

(3) 改变与主阀腔相通的指挥阀壳体直径对动态特性几乎没有影响。

(4) 主膜片和支撑硬块气动力是开启阀门主要驱动力, 如果支撑硬块直径偏小, 开阀时需要增大膜片负荷, 支撑硬块外缘的膜片载荷过大, 膜片鼓胀变形严重, 可能使膜片易于破坏。如果支撑硬块直径偏大, 会导致膜片局部变形严重。

(5) 排气口直径主要影响主活塞气动力, 口径越小主活塞向下压力越小, 有助于减弱通过硬芯轴传递到支撑硬块外缘膜片内应力危害, 但排气口直径太小, 则可能造成关阀时间延长和关闭不严的现象。如果要改变排气口直径尺寸, 必须同时考虑主膜片支撑硬块直径, 应该满足开阀时主膜片支撑硬块上的气动载荷大于或等于主活塞下压力, 同时应保证支撑硬块外缘留有足够的径向宽度适应膜片变形。

(6) 主活塞端面形状也主要影响主活塞气动力, 其影响量比排气出口直径的影响要小。分析比较以上平面和锥形端面形状后, 发现锥形端面使开阀后主活塞下压力减小, 有利于减弱压板外缘膜片的内应力危害, 使开、闭阀时刻主活塞下压力波动峰值减小, 气动力突跃现象得到一定程度的抑制, 使主阀开启导致的主阀腔压力瞬时降低幅度减小, 阀腔压力场的非线性程度降低, 有助于改善阀门动态特性。

(7) 指挥阀对整个阀门系统的动态特性至关重要, 在临界位置处拉套与小阀门之间存在漏气, 可使背压腔压力缓慢升高, 这一特性导致主活塞在开阀后难以稳定在一个平衡开度, 容易产生活塞开度的低频波动。执行关阀操作时, 衬套与拉杆之间的漏气量对动态特性有很大影响, 可能导致背压腔不能正常充气, 出现非正常关阀现象。延长指挥阀时滞可减小漏气量的影响。

### § 10.2.5 计算发现的非正常关阀现象

在对以上模型进行数值模拟试验时,发现在一定参数组合情况下会出现非正常关阀现象。正常关阀和非正常关阀的动态特性进行比较如图 10.26 所示,图中 AYF01 为非正常关阀算例,AYF08 为正常关阀算例。由于 AYF01 的开阀时滞较小,导致主阀开启得较早,造成主阀腔压力瞬时降低,这一信号传递到指挥阀,导致其位移回落较早。指挥阀的活塞回落以后,开度一直小于正常关阀算例 AYF08 的开度,阻碍了背压腔气体通过导管顺利排出,使背压腔内高压保持较长时间,如图 10.27 所示。当切断了气瓶进气以后随着主阀腔压力降低主活塞开始向关闭方向运动,开始关阀过程,此时如果背压腔的残留压力较高,则主活塞在初始阶段的运动速度也就较大,由图 10.28 可看到在关阀初始阶段 AYF01 的主活塞速度确实高于 AYF08,较快的主活塞运动速度引发了类似于气锤的效应,使得主阀腔压力出现波动,不再单调下降,这种压力波动传播到指挥阀,导致指挥阀拉套不能脱离小活塞,较长时间处于等待状态,此时由于漏气量存在而造成三方通气状态,背压腔缓慢过程充气(图 10.27 中 6.5s 以后的曲线比较),最终导致主活塞缓慢关闭。

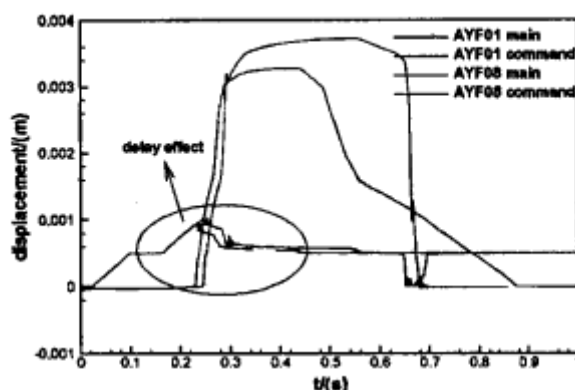


图 10.26 正常关阀与非正常关阀活塞位移

正常关阀过程是通过控制腔快速充气,导致主膜片气动载荷减小而实现的;非正常关阀则是不出现控制腔快速充气过程,主活塞以较慢速度趋向关闭。其原因是由于主活塞开始向关阀方向运动时阀腔出现气锤效应,压力先降低后升高,拉套与小活塞始终处于若即若离的临界状态(E区),形成主阀腔、控制腔、出口三方通气状态,控制腔缓慢充气,主活塞缓慢关闭。

计算发现,非正常关阀的出现与指挥阀时滞和拉杆拉套之间的漏气缝隙宽

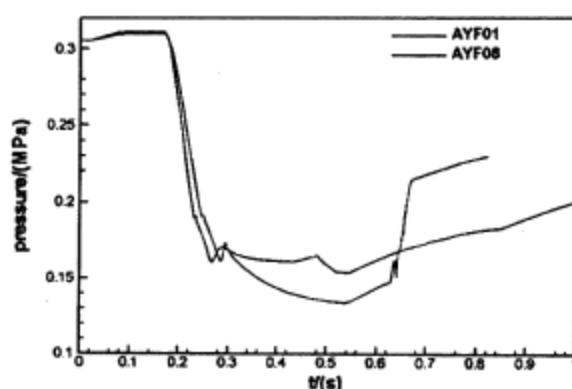


图 10.27 正常关阀与非正常关阀背压腔压力

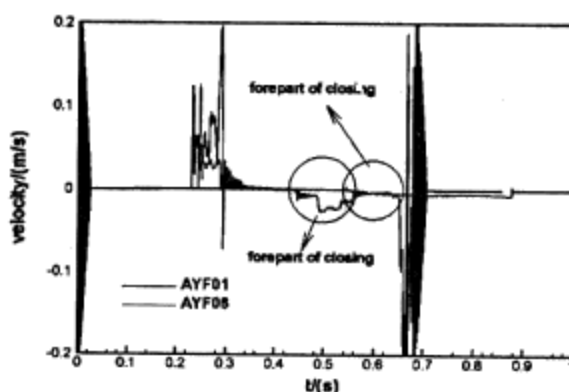


图 10.28 正常关阀与非正常关阀主活塞速度

度密切相关。下面说明漏气量的重要影响。仍以 AYF01 为例，在执行关阀操作前先关闭拉杆拉套的漏气量，三方通气状态被打破，背压腔不再缓慢充气而是继续放气，背压腔残留压力可继续降低，关闭漏气量后开始关阀过程时，背压腔的残留压力较低，这使得主活塞在初始阶段的运动速度也就较小，不足以引起气锤效应，主阀腔压力可以持续下降，使指挥阀拉套能够顺利脱离小活塞，实现背压腔快速充气并正常关阀。计算得到背压腔压力改变如图 10.29，关闭拉杆拉套漏气量以后背压腔内压力曲线和正常关阀算例 AYF08 的变化规律相同。

在以上分析中引出指挥阀时滞这一概念，用来表示指挥阀感受到增压信号到主阀动作完成的时间间隔，本质是介质压力波动在主阀背压腔、连通管路、指挥阀腔内传播。安逸阀门的时滞包括开闭过程，开阀时滞是从小活塞离开小活门座到主活塞开启的时间，表现为图 10.20 中的 C 区间，关阀时滞是从拉套

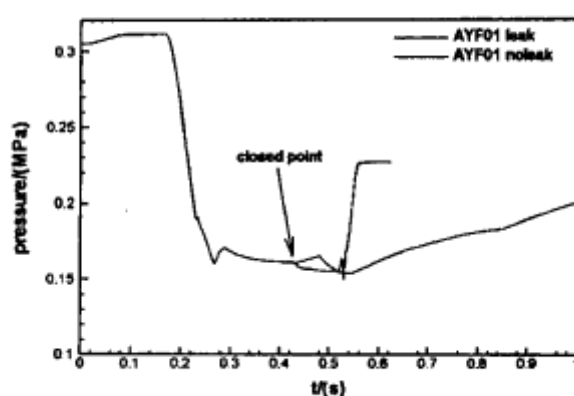


图 10.29 拉杆拉套漏气量对背压腔压力影响

将小活塞放回小活门座并离开小活塞到主活塞开始关闭的时间，表现为图 10.20 中的 F 区间。关阀时滞除了结构的几何因素影响外，还与腔内保留压力有关，在发生非正常关阀时没法确定，开阀时滞发生在充气增压过程的末尾阶段，真正体现了指挥阀与背压腔之间的管路信号延迟特性，因此，可以用来作为评价动态特性的指标。

开阀时滞主要受连通管路直径和背压腔容积的影响，对于以上阀门，不同结构形式的开阀时滞为 45ms 到 110ms 不等。减小连通管路直径或增大背压腔容积可延长指挥阀时滞，增大气动阻尼，有助于抑制阀门开闭过程中的振荡，但同时也会使阀门的灵敏性降低。改变连通管路直径或背压腔容积可以避免非正常关阀现象，具体算例较多，不再介绍。

安溢阀门系统存在三种频率：

(1) 指挥阀与主阀所构成的弹性系统的固有频率，根据前面的结构分析可以给出；

(2) 复杂外形中流动的气体产生的压力波频率；

(3) 指挥阀与主阀耦合形成的一种周期性工作频率（本书简称第三频率）。

由于弹性系统的固有频率较高，因此在分析中特别关心后两种现象的相互影响，进行调整进气速度和流量的状态模拟。

主阀开启后影响指挥阀回到临界位置的主要因素是主阀腔压力，提高主阀腔降压速度的途径是在最大开度时气瓶进气流量小于排气流量。为考察气瓶内压力波动对阀门动态特性的影响，当主阀开启到最大开度后关闭进气口，这时进气流量小于排气流量的情况，结果导致了主阀腔压力降幅增大，指挥阀回位到临界位置，漏气量造成主阀活塞向关阀方向运动，产生如图 10.30 所示的位移变化（1s 以前的曲线）；如果当主阀位移减小到一定程度时，开启进气口进

行充气, 将使主阀位移重新增大, 产生低频波动。通过这个算例表明, 气瓶内部压力振动可能会与第三频率形成共振, 在试验和工作中应该避免气瓶进气通道口交替开闭操作。另一个验证算例是, 恒定流量充气, 但流量减小到原来的 65%, 得到的结果见如图 10.31 所示, 主阀位移同样也出现了波动。

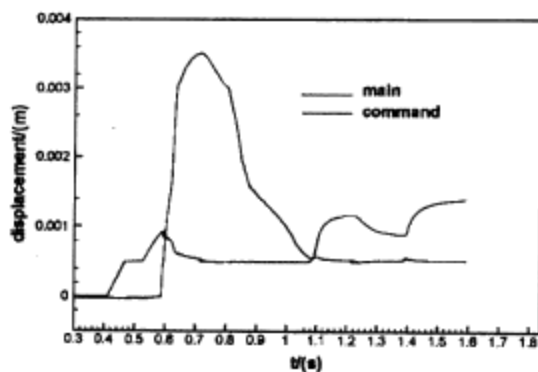


图 10.30 气瓶进气波动引起异常波动

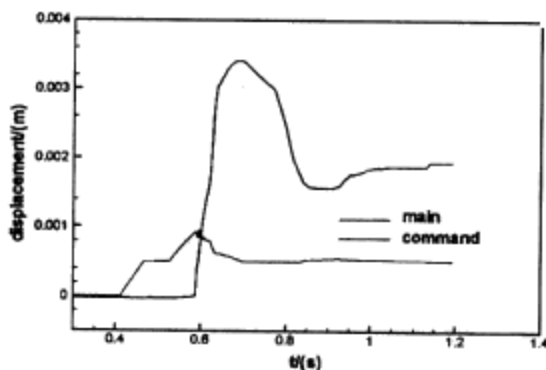


图 10.31 低流量引起异常波动

以上非正常关阀、交替开闭和低流量波动是计算发现的新现象, 值得进一步细致探讨, 对于分析试验中出现的异常状态提供了新的流动机理。

### § 10.3 减压器的动态特性仿真研究

减压阀也属于自动阀门, 广泛应用于各种工业设备中, 其工作原理是利用高压入口压力和低压出口压力作用在敏感元件膜片上产生的力与元件主弹簧的力之间的压力差, 使内部阀瓣动作, 自动调节阀瓣开度, 保持出口压力值满足

设计要求。

### § 10.3.1 工作原理和结构建模

减压器结构如图 10.32 所示,在主弹簧的作用力下,高压腔和低压腔之间存在预先设计的节流缝隙,来自气源的高压气体进入减压器高压腔,通过节流缝隙进入低压腔必然提高腔内的压强,低压腔和背压腔之间的膜片两侧压差推动主弹簧运动,通过顶杆迫使阀芯向阀座移动,节流缝隙变小,减少气体流量,降低低压腔内压强,主弹簧又逐步恢复初始状态,如此往复,最后达到平衡。为了保证阀芯移动时包装空间内部气体自由出入,在高压腔上面设计了卸荷腔,顶杆有内孔,因此卸荷腔与低压腔之间相通,高压腔和卸荷腔之间有橡胶涨圈,对阀芯运动有阻尼作用。阀芯运动在卸荷腔有上限位,在背压腔主弹簧也有上限位防止与阀芯脱离。

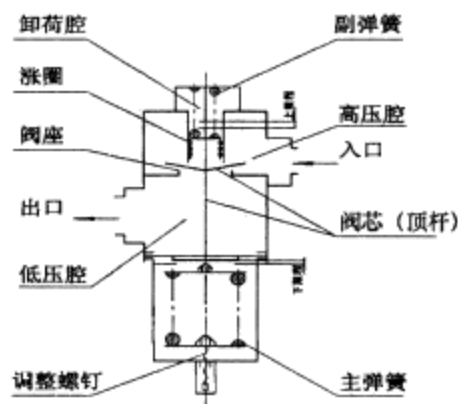


图 10.32 减压器工作原理示意图

减压器运动系统结构分析模型如图 10.33 所示,包括主弹簧、副弹簧、阀芯(顶杆)、膜片等部件组成一个质量弹性阻尼系统。系统安装调节后,主弹簧顶起膜片与阀芯接触推动阀芯(顶杆)向上移动,使阀门打开,由于阀芯向上运动受到副弹簧抑制和上限位约束,阀门开度有限。有进气以后,主弹簧无法抵御低压腔和背压腔压差推动膜片向下移动,使得阀门开度减小,当阀芯落到阀座,发生碰撞,限制了阀芯向下位移,这以后压差进一步增大,膜片与阀芯脱离接触,可以继续向下位移。在高压腔和卸荷腔之间有可调节阻尼的涨圈结构。气动力、摩擦力、阻尼力等是非保守力,另外,膜片结构的特点、材料特性、几何尺寸决定了膜片运动变形的非线性特性,因此,系统运动是一非保

守动态过程。

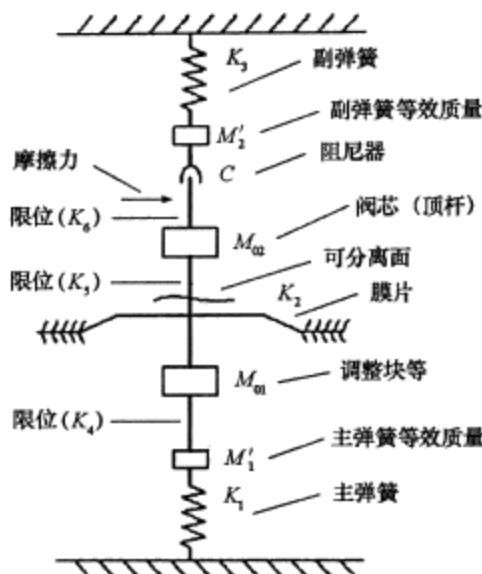


图 10.33 减压阀结构模型

当减压阀受到干扰，使出口压力偏离平衡位置时，具有使之恢复到平衡值的能力，因此减压阀大多处于动平衡状态，内部气体流动是非定常的，作用在膜片两侧压力差也有波动，减压阀具有一定的质量，运动受惯性力影响，运动件和固定件之间有摩擦阻力。系统在激振力、惯性力与阻尼相互作用下，有时出现不稳定，大多表现为谐振，进行动态特性仿真研究时需要采用流固耦合方法。

减压阀结构分析建模过程与上一节安逸阀门类似，从图 10.33 可以看出，阀芯（顶杆）与膜片支撑硬块存在分离面，在分离面处将系统运动分为上下两部分，单独建模，运用拉格朗日方程可以推导得到两套描述运动的常微分方程。

采用变量  $x_1$  描述包括膜片的下部分位移，建立的运动方程模型为：

$$(M_{01} + M_1')x_1'' + K_1(x_1 - L_1) + K_4(x_1 + L_4) = F_{q1} - F_{12} - F_z(x_1)$$

其中， $M_{01}$  为调整块硬芯、弹簧上座、膜片等质量和， $M_1$  为主弹簧等效质量；不计系统阻尼； $K_1$  为主弹簧刚度， $L_1$  为弹簧预压缩量； $K_4$  为下限位弹簧刚度， $L_4$  为下限位。 $F_{q1}$  为作用在膜片上的气动力，分为硬芯和膜片两部分： $F_{q1} = F_{q1c} + F_{q1w}/\xi$ ，在膜片上存在应变，因此需要除以折算系数  $\xi = 2.12$ ； $F_{12}$  为与下部接触力，当上下分离后  $F_{12} = 0$ ；膜片变形反力  $F_z(x)$  与位移  $x$  的关

系,即膜片的刚度特性,采用 ANSYS 软件得到,计算时考虑到膜片厚度很薄,当横向位移较大时,膜片横向刚度产生应力强化效应,因此,需用大位移方法(几何非线性)计算膜片位移与反力的关系,另外,膜片横向位移较大时,可能使膜片内部应力超过屈服限,因此膜片材料采用弹塑性模型来描述。

采用变量  $x_2$  描述上部分的位移,建立的运动方程模型为:

$$(M_{02} + M_2)x_2'' + Cx_2' + K_3(x_2 + L_3) + K_5(x_2 + L_5) + K_6x_2 = -f \times \text{sign}(x_2') + F_{q2} + F_{12}$$

其中,  $M_{02}$  为阀芯及顶杆质量,  $M_2$  为副弹簧等效质量;  $C$  为系统阻尼系数;  $K_3$  为副弹簧刚度,  $L_3$  为副弹簧预压缩量;  $K_5$  是下限位弹簧刚度,  $L_5$  是下限位;  $K_6$  是上限位弹簧刚度;  $f$  为橡胶圈的摩擦力,与速度成比例关系;  $F_{q2}$  为作用在阀芯上的气动力,  $F_{12}$  为与下部接触力,当上下分离后,  $F_{12} = 0$ 。

以上运动方程是非线性的,采用前面章节介绍的纽马克方法求解。

不考虑气动力,从阀门关闭状态开始振动,求解结构动力学方程计算系统频率特性。位移随时间变化曲线两次通过平衡位置的时间差为运动周期,周期倒数为频率。计算得出如下结论:

(1) 膜片刚度是非线性的,系统振动频率是变化的,系统最低频率对应大振幅情况,最高频率对应小振幅情况。膜片厚度 0.08 ~ 0.15mm、摩擦力 0 ~ 500gf 变化时,系统振动最低频率为 1187.3 ~ 1257.0Hz,最高频率趋向无穷大。

(2) 由于阻尼力的存在,振幅随时间衰减,其中摩擦力对振幅衰减影响大,对频率影响很小。

(3) 膜片厚度增大,刚度增大,最低振动频率值增大。

### § 10.3.2 动态特性的流固耦合模拟

考虑到主弹簧罩体积较大,膜片微小变形不会引起罩内压力变化,因此建模时省略膜片以下的弹簧罩空间区域,其他部分几何建模基本接近真实设计外形。表面网格和涨圈结构局部网格如图 10.34 所示。

减压器在结构上存在三个细小尺度:

- (1) 阀芯运动时与阀座之间是接触/分离运动状态;
- (2) 卸荷腔与高压腔之间通过涨圈结构相连,该结构是一狭缝通道;
- (3) 进气口前的过滤器是一种多孔网状结构。

如果严格按照设计尺寸生成网格,则该处网格尺度太小,将大大减小计算

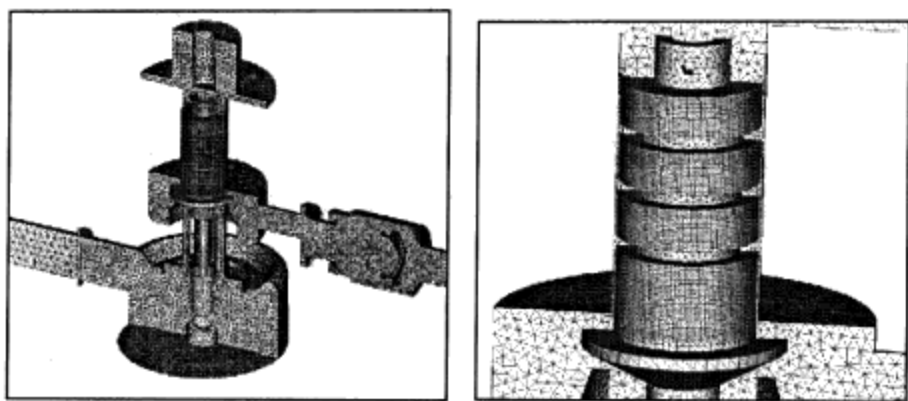


图 10.34 整阀表面网格和涨圈结构局部网格

时间步长,使计算时间不能承受。为此,在建模时都要应用到前面介绍到的虚拟挡板技术。

在阀芯与阀座之间采用了虚拟挡板,宽度为 0.4mm,如图 10.35 所示。计算过程中,当阀芯开度小于这一宽度时,由虚拟挡板部分通气模拟阀芯真实开度,此时虚拟挡板网格不动,阀芯活塞的下端面固定不动;当阀芯开度大于这一宽度时,虚拟挡板全通气并随着阀芯运动作拉伸动网格处理,阀芯活塞的下端面也按计算出的位移作平动。阀芯活塞的上端面(涨圈一侧的平台)始终按照计算得出的阀芯位移作平动。

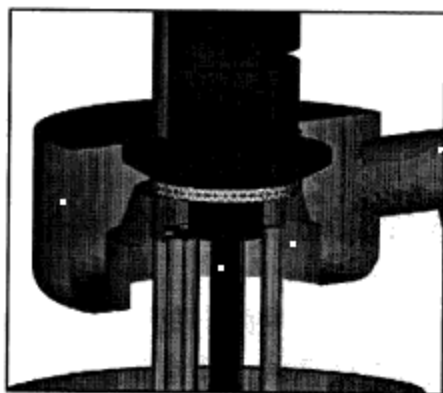


图 10.35 阀芯与阀座之间的虚拟挡板

卸荷腔与高压腔之间通过涨圈结构相连,该结构是一狭缝通道,因此,建模时将该处狭缝通道尺寸人为放大,然后通过在该通道与高压腔的交界处设置虚拟挡板,保持流通面积和实际一致,以此来模拟流量等条件。

多孔网状结构过滤器计算网格如图 10.36 所示,按照过滤网的真实透气率

给定虚拟挡板的通气比例,这样既可实现过滤器对气流的阻挡效应,又不会增加网格生成和计算模拟的工作量。

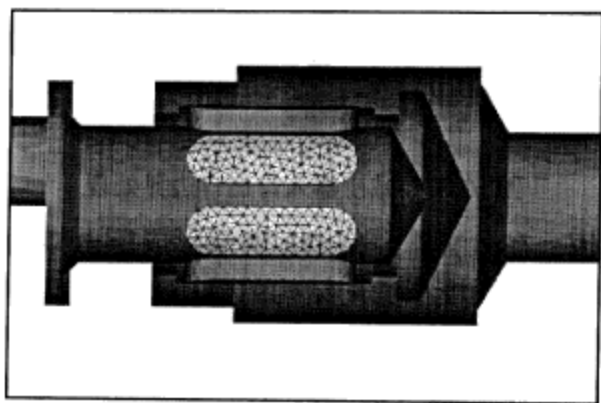


图 10.36 过滤器虚拟挡板

膜片被硬芯和压板覆盖的部分连同硬芯按计算出的硬芯位移作平动,膜片在硬芯压板以外的部分则沿径向作线性变形。膜片/硬芯组件与阀芯/顶杆组件在铰支座处既可接触也可分离,两者接触时同步运动,分离后按照各自的运动规律运动。

减压器入口连接高压进气管路,高压气通过电磁阀进入进气管路,电磁阀开启时间从 10ms 到 200ms 不等。入口压力在电磁阀开启时间段内呈线性增大,电磁阀开启导致的快速增压过程使得进气管路中形成激波冲击。激波在进气管内遇到管径变小以及过滤器壁面时,生成反射波并向入口回传,由于计算域进气管路长度有限,反射波很快到达入口并干扰入口边界条件,使计算不能正常进行下去。如果只是简单加长进口管路的长度,则会导致计算域大得惊人,同时使计算效率大大降低。

为了解决这一问题,本课题提出一维流动模型入口出口边界处理方法,如图 10.37 所示,在三维计算域的入口和出口处连接足够长的一维等截面管路模型,一维模型与三维模型之间通过延拓两排虚拟网格点来传递流场物理量。由于一维模型计算耗时与三维流场计算相比可以忽略不计,因此一维管路模型的有量纲长度可以按照实际试验系统取得足够长。

流动模拟从减压器上游的电磁阀开启瞬间开始,计算区域进口边界的压力从环境大气压在有限时间内线性增大到给定值。从图 10.38 所示的压力云图可以明显看出,由于电磁阀开启时间较短,增压过程在进气管路中形成激波,激波在进气管内遇到管径变小以及过滤器壁面时,生成反射波并向上游回传;由



图 10.37 减压器入口出口边界处理

于过滤器有阻挡作用,在过滤器虚拟挡板两侧形成压力梯度,这说明本课题提出的虚拟挡板技术可以成功模拟滤网结构的阻挡作用。

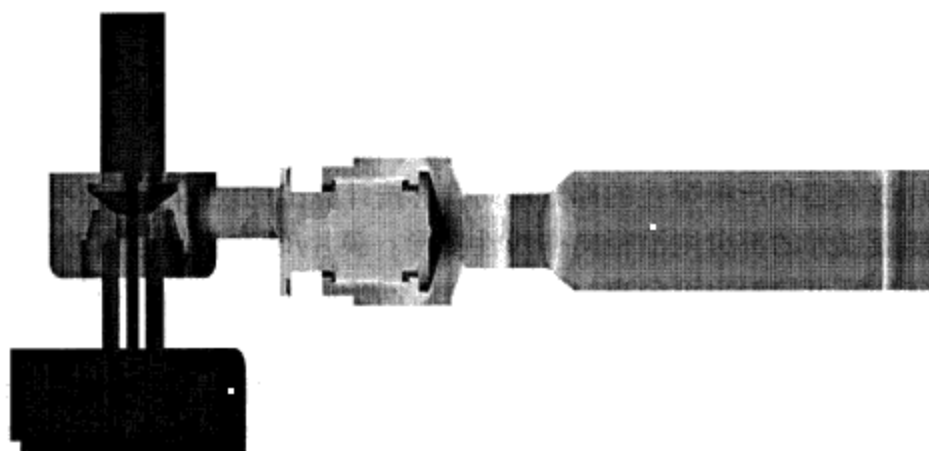


图 10.38 过滤器和阀座附近的瞬时压力分布图

气体进入高压腔并通过初始开启的阀芯/阀座缝隙进入低压腔,随着入口压力的增大,低压腔的压力也升高,最终驱动膜片向下运动,阀芯在副弹簧的作用下也向下运动,将活门开度关小。当电磁阀完全打开以后,上游进气压力逐步趋于稳定,高压腔压力和低压腔压力均以小幅振动的形式各自维持在一定范围内,此时网格、马赫数和压力分布如图 10.39 所示。减压器在达到相对稳定状态时,活门开度很小,接近关闭,从高压腔、卸荷腔到低压腔的压力存在明显差异,通过阀门和阀座之间的流量很小,高压气体主要通过涨圈结构进入卸荷腔,然后从顶杆中的细长孔进入低压腔,从马赫数分布看速度比进气管路内大的多,在出口处达到超声速,根据这一信息可以判断顶杆侧孔起到了限流作用,几何参数应该作为动态特性的设计指标考虑。

以上是减压器内部流动的基本特征,实际上从整个计算过程中监测点的压力历程和位移曲线来看,由于流动与结构相互耦合作用,减压器稳定状态是相

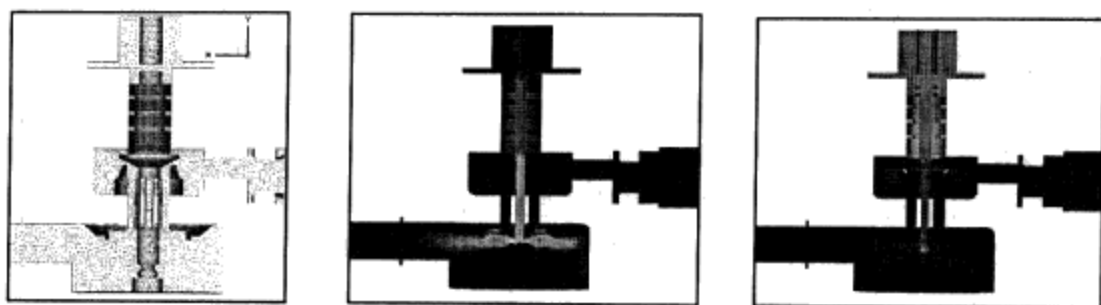


图 10.39 减压阀相对稳定状态下网格、马赫数云图和压力云图

对的，动力学系统呈现出周期性特性。

在高压腔和低压腔不同测点上压力有微小差异，但是，数值量级和变化规律几乎一致。图 10.40 是在不同来流总压、相同电磁阀开启条件下高压腔和低压腔两个监测点的压力历程。图中显示出，尽管总压条件不同，高压腔压力由环境 1atm 增大到最大值所需时间大约都在 20ms ~ 30ms 之间，与入口边界条件给定的 20ms 开启时间相符合；由于气体流经进气管路以及过滤器等结构时存在总压损失，例如，入口总压 21MPa 算例所达到的最大压力大约为 18MPa。由于开启压力为 2MPa 时减压器的低压腔压力较小，减压器的弹性元件基本不需运动，只靠流动损失就实现了减压作用，基本保持了原来的常开状态，只是开度稍有减小，高压腔压力与低压腔压力基本接近，弹性敏感元件的运动没有达到下限位，也就没有形成振动，因此其压力曲线是光滑的；其他算例中流固耦合影响导致阀芯顶杆以小幅振动的形式工作，因此，流场不存在稳定解，在高

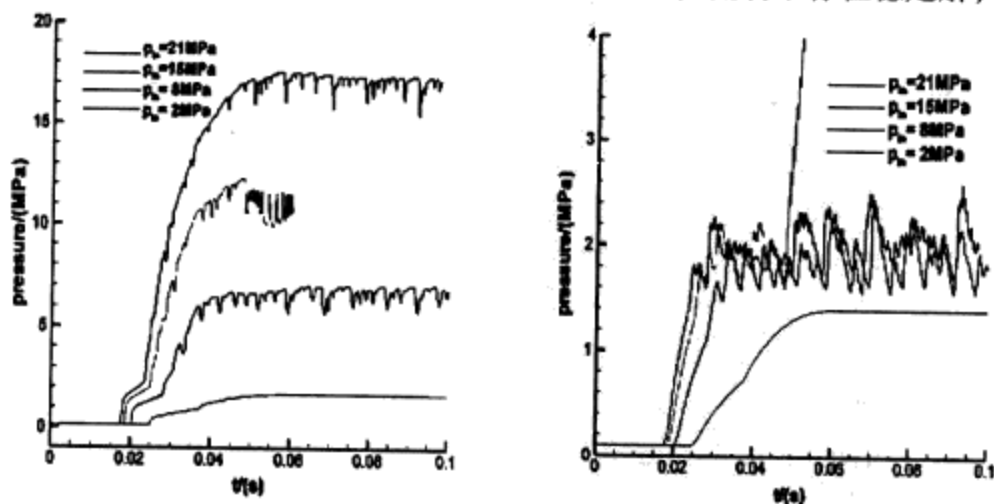


图 10.40 不同总压进/入口测点压力历程

压腔内压力表现为微小波动。

除了总压大于 2MPa 算例，在高压腔相对稳定工作以后，低压腔压力呈现出接近等幅的周期性振荡，这种振荡是由于弹性敏感元件的振动造成活门开度频繁变化导致的，尽管开启压力不同，但是低压腔压力的大小基本一致，说明减压器起到了调压作用。仔细观察低压腔压力振动曲线可看到，压力上升过程的斜率比下降过程的斜率大得多，这是由于每当活门开度增大，高压腔压力就对低压腔进行一次激波冲击，低压腔压力就会突然升高，而当活门开度维持在较小状态时，低压腔压力通过出口孔板卸压，压力下降进行得较慢。高压腔压力也有类似现象，只是与低压腔压力波形相反。

图 10.41 是在总压 21MPa 相同、电磁阀开启时间不同的条件下，高压腔和低压腔压力的变化历程。高压腔增压斜率与开启持续时间成线性变化，达到相对稳定状态腔内压力基本上为 17Pa ~ 18MPa。低压腔增压时间随开启时间单调变化，相对稳定工作以后的压力振荡特性与开启时间没有明显关联。

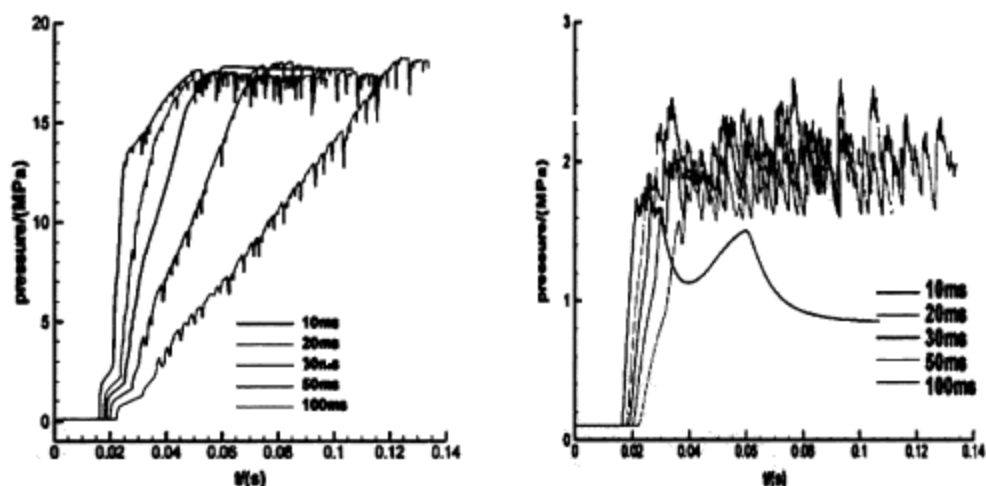


图 10.41 不同电磁阀开启时间测点压力历程

在图 10.41 中开启压力为 15MPa 的算例和图 10.41 中 30ms 的算例均出现了非正常工作状态，下面结合弹性敏感元件的运动特性进行机理分析。

20ms 开启时间、不同来流总压条件下阀芯顶杆与膜片的位移随时间的变化如图 10.42 所示，图中位移为 0 表示阀芯关闭状态，曲线在 0 以下的部分是膜片硬芯与阀杆分离后单独运动的位移，0 以上的部分则既有阀芯阀杆的运动又有膜片硬芯的运动，一般情况下两者是重合的。由图可见，总压为 21MPa 和 8MPa 算例中，弹性敏感元件的运动始终以振动的形式进行，并不会稳定下来，总压越高，阀芯振幅的平均值越小，也就是开度越小。总压为 2MPa 算例

中, 由于低压腔压力较小, 弹性元件只运动了很小位移, 即阀芯开度由常开状态稍有减小就达到稳定, 膜片没有位移, 减压器没有真正工作。

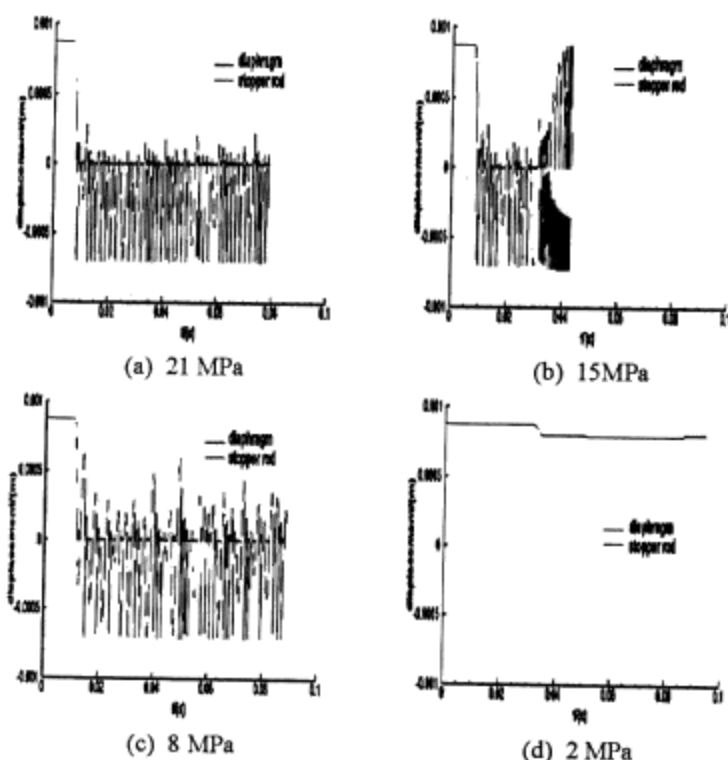


图 10.42 不同总压条件下阀芯与膜片位移

总压为 15MPa 算例中, 减压器弹性元件以小幅振动的形式工作了一段时间后便振动发散, 结合前面给出的低压腔压力曲线急剧升高的现象, 说明高压腔压力作用下阀芯的开阀运动导致低压腔压力出现波动, 这种波动与结构运动产生共振, 导致振动发散。这种非正常工作状态称为流体和结构共振发散故障。模拟仿真表明, 可以通过采用增大低压腔容积和改变出口孔板位置来改出故障状态。

总压 21MPa 持续时间 30ms 算例中, 膜片硬芯经过了一次下限位碰撞后向上运动, 并与阀芯顶杆碰撞, 碰撞时两者的动量方向相反但大小接近, 因此碰撞后两者速度变得很小并保持接触, 在气体压力的作用下, 阀芯运动到关闭状态并保持不再变化。从图 10.41 中低压腔压力变化历程看最终稳定在一定值, 但不是设计值, 分析其流场发现, 因为涨圈结构的漏气进入泄荷腔再经由顶杆中心孔进入低压腔与出口排气达到了平衡, 此时弹性元件的受力也达到了平衡。这种非正常工作状态称为涨圈漏气故障。模拟仿真表明, 改变涨圈漏气量

可以改出故障状态。

## § 10.4 小 结

由于阀门模型尺度很小,内部有活动部件,应用常规的流动测试技术进行精细实验很困难,国内还没有看到可供数值模拟比较的阀门动态特性试验数据或计算模拟文献。国外部分文献提供了不同开启速度下测量到的动态流量系数曲线<sup>[35]</sup>,但是,没有阀门结构模型,也难以对其计算模拟结果进行复现。因此,本章研究结论有待于进一步的验证。

传统上分析阀门动态特性主要采用从常微分方程出发的仿真模型,在文献[34-36]中,把从三维NS方程出发的非定常流场计算分析称为“高保真动力学模拟(High-fidelity dynamic computational simulations)”。本章研究与国外相关文献相比,由于计算条件所限制没有考虑粘性,从描述实际物理问题的动力学模型和计算模拟方法来看,在如下几方面仿真程度更高:

- (1) 采用动网格技术模拟内部活动部件、虚拟网格技术模拟从密闭到开启微小缝隙、进排气动态增压和管路影响;
- (2) 根据阀门设计方案进行结构动力学建模,并且实现了结构与流场的耦合模拟,发现了一些只有流固耦合才能出现的异常现象。

## 第十一章 化学非平衡流和爆炸现象的计算模拟

### § 11.1 引言

爆炸是将物质潜在的势能或化学能在短时间内通过物理或化学过程迅速转变为机械功的过程。爆炸的一个重要特征是爆炸点的压力发生急剧的突变，产生以爆炸点为波源的应力波。爆炸冲击波（Blast wave）是由于常规化学爆炸或核爆炸等产物猛烈地推动周围空气而引起的激波；流场内包含有激波、膨胀波、接触间断、漩涡等复杂流体动力学现象，而且爆炸波运动过程中流场参数随时间和空间变化非常剧烈，是一个高度非定常、非线性的动力学问题。

研究爆炸波在介质中的传播特性、爆炸波与物体的相互作用等问题，对于有效利用爆炸具有重要的应用价值。经过近百年发展形成的爆炸动力学理论对于工程技术具有重要的指导意义，但是理论分析能够得到的精确解非常少，且大多是一维模型，对具体应用问题预测精度往往难以满足设计要求。爆炸波试验研究具有真实、可靠等优点，但是，也存在实物模型费用高、危险性大、获取信息量少、难以满足缩比模型动力学相似准则等不足。随着，计算机技术的飞速发展，采用数值仿真研究爆炸冲击波，通过求解流体力学方程组，对爆炸波现象进行“虚拟现实”仿真研究越来越引起人们的关注。

在文献[37]中，进行了爆炸冲击波对防护门的毁伤效果的试验和仿真，试验模型如图 11.1 示意，在圆形截面密闭通道的一端安装有对开的钢结构防护门，在门后一定距离采用张线方式悬挂一根长细比很大的柱状炸药，计算从点火开始，模拟了在装药内部爆轰波传播、空气介质中冲击波传播及其与通道壁反射、冲击波与防护门的流固耦合动力学过程，图中给出冲击波到达防护门前在密闭通道内的速度分布，可以看出柱状药型产生的射流效应。文献中还比

较了流固耦合计算得到的防护门变形和试验观测到的模型破坏形状,可以看出,二者非常接近,说明计算仿真具有一定的精度,可以应用于工程中来弥补理论和实验研究的不足。文献报道,通过爆炸波在美国世贸中心地下车库(包括所有墙壁、斜坡、通风口、房屋、汽车等)传播过程仿真,为确定嫌疑犯车辆停放位置和炸药当量提供依据;洛克比空难过程中飞机内部爆炸过程的流固耦合仿真,对于确定爆炸装置在行李舱位置也起重要作用;日本虚拟火箭发射过程爆炸对发射场建筑物的影响。这些应用研究表明,数值模拟具有效率高、研究周期短、信息量大、应用范围广等优点,尤其是直观显示爆炸冲击波流场的局部细节对于关心强度问题的工程设计非常有效。

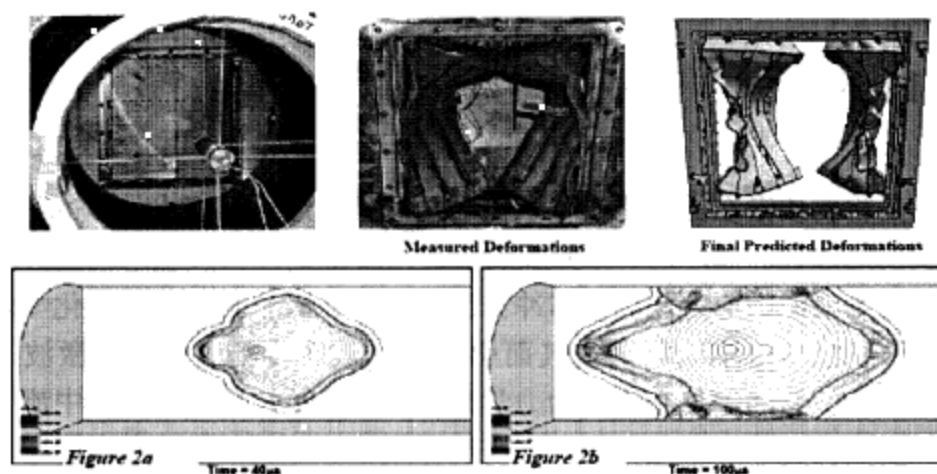


图 11.1 试验模型、防护门变形的实验和计算比较、流场速度分布

本书前面章节介绍的非结构动网格技术应用于爆炸波与物体的相互作用的流固耦合问题研究,有限体积法、描述物体的复杂几何外形、气动力作用下产生的运动和变形等方面不存在难度,但是,还需要补充爆源动力学的控制方程和模拟方法等相关内容。

对于常见的可燃气体爆炸和固体炸药爆炸进行流体动力学仿真时所使用控制方程,以及应用有限体积法求解这些方程的一些与前面不同的算法,介绍如下。

## § 11.2 基于非结构网格的化学非平衡流动模拟解耦算法

目前 CFD 的绝大多数应用实例是基于量热完全气体动力学方程进行数值模拟,对于多组分气体的非平衡化学反应流动模拟还不尽如人意,主要原因在于:(1)理论上涉及多学科,出发模型方程较为复杂;(2)计算方法上存在刚性问题等特殊特性;(3)化学非平衡流动是时间和空间上多尺度现象,求解变量多、网格量大、时间推进步长小等因素对计算机条件提出很高要求。

超声速非平衡流中化学反应生成源项引起的刚性问题 (Stiffness) 数值求解分为两类,一类是源项与流动一起计算的耦合方法,另一类是源项与流动分别计算的解耦方法。耦合方法在国外于 20 世纪 80 年代中期提出,又分为点隐法和全隐法,目前国内大部分文献采用公式推导简单、计算效率较高的点隐法。耦合方法的计算量随化学反应组元数目剧烈增加,点隐法的计算量与变量数目的二次方成正比,全隐法的计算量与变量数目的三次方成正比。在时间精度上,点隐法只有一阶;部分全隐法具有二阶精度,但是计算量更庞大,很少应用。

早期国外探索过解耦方法,有些方法当空间分辨率不够时,会得到错误的间断传播速度,有些方法特征表达式推导过程和编程复杂,很少看到其推广应用。文献 [38] 中提出了一种基于有限差分法的新型解耦算法,这种算法与国外解耦方法的区别在于引入中间能量和等效比热比,对非平衡流动控制方程组进行了变换,然后采用时间相关法进行解耦处理。大量应用算例表明,新型解耦算法与隐式方法相比,增减气体组分不需要修改程序,计算量与变量数目呈线性关系,改变化学反应机理仅需要修改源项模块,其流动方程求解与量热完全气体的数值方法一致,非常适用于软件工程化。

### § 11.2.1 非齐次波动方程的时间分裂法

下面首先分析目前广泛应用的点隐法时间精度,然后介绍作为解耦算法理论基础的非齐次波动方程的时间分裂法。根据非平衡流动控制方程特点,考虑如下非齐次偏微分模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t) \quad (11.1)$$

按照点隐法对源项进行线化处理:

$$f(t) = f^n + \Delta t \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_i^n + O(\Delta t^2) = f^n + d_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n) + O(\Delta t^2)$$

对流项采用显式差分格式离散, 一阶空间导数对应算子记为  $L_x^I$ , 得到如下计算形式:

$$(1 - \Delta t d_i^n) u_i^{n+1} = (1 - \Delta t \cdot L_x^I) u_i^n + \Delta t \cdot (f_i^n - d_i^n u_i^n) \quad (11.2)$$

假设空间算子  $L_x^I$  高精度, 下面来分析点隐法引入源项算子后, 以上计算格式的时间精度。时间二阶精度的显式差分格式基础是如下 Taylor 展开式:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (11.3)$$

利用模型方程 (11.1) 把时间导数化为空间导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f$$

代入方程 (11.3), 二阶空间导数对应算子记为  $L_x^II$ , 得到时间二阶精度通用格式:

$$u_i^{n+1} = \left( 1 - \Delta t \left( 1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot L_x^I + \frac{\Delta t^2}{2} L_x^II \right) u_i^n + \Delta t \cdot f_i^n \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \quad (11.4)$$

比较 (11.2) 和 (11.4) 可以看出, 即使流动项算子  $L_x^I$  采用高精度差分格式, 由于点隐法中没有考虑时间二阶导数对应算子  $L_x^II$ , 总的离散算子难以保证二阶精度, 因此, 点隐法这些计算方法对于定常流动在达到收敛以后是可以的, 但用于模拟非定常流动时间精度较低。

考虑如下波动方程和常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f \end{cases} \quad (11.5)$$

波动方程的时间二阶精度离散算子记为  $L_x = \left( 1 - \Delta t \cdot L_x^I + \frac{\Delta t^2}{2} L_x^II \right)$ , 常微分方程有多种成熟解法, 采用算子表示的时间二阶精度格式的形式为:

$$u^{n+1} = [1 + L_f(\Delta t)] u^n$$

不管算子  $L_f$  具体形式, 时间二阶精度离散基础依然为:

$$L_f(\Delta t) \cdot u^n = \Delta t \cdot f^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (11.6)$$

采用时间分裂格式进行计算,在完成两步以后,下一时刻的值为:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= L_x(\Delta t) [1 + L_f(\Delta t)] u_i^n \\ &= L_x(\Delta t) u_i^n + L_x(\Delta t) L_f(\Delta t) u_i^n \\ &= \left(1 - \Delta t \left(1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot L_x' + \frac{\Delta t^2}{2} L_x''\right) u_i^n \\ &\quad + \Delta t \cdot f_i^n \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f}{\partial u}\right) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (11.7)$$

比较(11.4)式和(11.7)式可以看出,在时间二阶精度条件下是等价的。因此,非齐次偏微分模型方程也可以采用时间分裂法建立时间和空间二阶精度的计算格式。

### § 11.2.2 新型解耦算法

在 CFD 中习惯采用无量纲的物理量和控制方程。如果用长度  $L^*$ 、自由来流速度  $u_\infty^*$  和密度  $\rho^*$  作为参考物理量进行如下无量纲化:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L^*}, & y &= \frac{y^*}{L^*}, & z &= \frac{z^*}{L^*}, & u &= \frac{u^*}{u_\infty^*}, & v &= \frac{v^*}{u_\infty^*}, & w &= \frac{w^*}{u_\infty^*} \\ \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_\infty^* u_\infty^{*2}}, & T &= \frac{T^* R_\infty^*}{u_\infty^{*2}}, & t &= \frac{t^* u_\infty^*}{L^*}, & \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_\infty^*} \\ a &= \frac{a^*}{u_\infty^*}, & e &= \frac{e^*}{u_\infty^{*2}}, & h &= \frac{h^*}{u_\infty^{*2}}, & \rho_i &= \frac{\rho_i^*}{\rho_\infty^*} \end{aligned}$$

其中,上标“\*”表示有量纲量,下标“∞”为自由来流参数。 $R_\infty^* = R_0^* / \bar{M}^*$  为自由来流等效气体常数,  $\bar{M}^*$  为自由来流气体的等效摩尔质量;  $x, y, z$  为笛卡儿坐标分量,  $u, v, w$  为对应的速度分量;  $\rho, T, p, \mu, a, e, h$  分别为气体的密度、温度、压力、粘性系数、声速、内能和焓;  $\rho_i$  是混合气体中  $i$  组分密度。对于两方程湍流模型,采用如下无量纲化:

$$\mu_t = \frac{\mu_t^*}{\mu_\infty^*}, \quad k = \frac{k^*}{u_\infty^{*2}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^* L^*}{u_\infty^3}$$

对直角坐标系描述非平衡流和湍流的三维守恒形式 N-S 方程进行无量纲化以后,得到如下基本方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F - F_v)}{\partial x} + \frac{\partial (G - G_v)}{\partial y} + \frac{\partial (H - H_v)}{\partial z} = S(U) \quad (11.8)$$

其中,  $F, G$  和  $H$  是对流项通量,  $F_v, G_v$  和  $H_v$  是扩散项通量,可以参考相关

文献得到, 这里仅给出求解变量  $U$  和源项  $S(U)$  的表达式:

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E^*, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho k, \rho \varepsilon)^T$$

$$S(U) = (0, 0, 0, 0, 0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, S_k, S_\varepsilon)^T$$

包含速度动能的气体微团总内能写为:

$$E^* = 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2) + \sum_{i=1}^n \rho_i e_i(T)$$

热力学内能进一步写为如下热焐和生成焐的形式:

$$E^* = 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2) + \sum_{i=1}^n \rho_i [h_i + h_i^0] - p$$

其中  $\rho_i$ 、 $h_i$  和  $h_i^0$  是  $i$  组分的密度、热焐和生成焐, 混合气体微团密度  $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$ , 根据组分质量比数定义:  $\rho_i = \rho c_i$ , 可知  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ 。化学反应过程中质量守恒, 组分方程的化学反应生成源项满足:  $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 0$ 。

对于化学反应方程式:

$$\sum_{i=1}^n \nu_{\bar{y}} B_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \nu_y^* B_i$$

这里  $\nu_{\bar{y}}$  和  $\nu_y^*$  分别为反应物和生成物的化学计量系数, 源项  $S(U)$  中第  $i$  组分质量生成率的无量纲形式:

$$\sigma_i = C_i M_i^* \sum_{j=1}^J (\nu_{\bar{y}}^* - \nu_{\bar{y}}) Q_j$$

其中系数  $C_i = \frac{L^*}{\rho_\infty^* u_\infty^*}$  是无量纲过程引出的, 式中摩尔生成速率写为如下形式:

$$Q_j = C_f \cdot k_{fj}^* \prod_{i=1}^n X_i^{\nu_{\bar{y}}} - C_b \cdot k_{bj}^* \prod_{i=1}^n X_i^{\nu_y^*}$$

为有量纲量, 但其中  $X_i = \rho_i / M_i^*$  中的密度采用无量纲值, 那么式中系数:

$$\begin{cases} C_f = (\rho_\infty^*)^{\sum_{i=1}^n \nu_{\bar{y}}} \\ C_b = (\rho_\infty^*)^{\sum_{i=1}^n \nu_y^*} \end{cases}$$

正反应速率系数  $k_{fj}^*$  和逆反应速率系数  $k_{bj}^*$  习惯直接写为有量纲的形式, 具体单位与化学反应方程式有关联。如果已知正向反应速率系数  $k_{fj}^*$ , 那么逆向反应速率系数  $k_{bj}^*$ :

$$k_{ij}^* = \frac{k_{ij}^*}{K_{js}(T) C_b}$$

采用摩尔浓度表示的平衡常数  $K_{js}(T)$ :

$$\begin{aligned} K_{js}(T) &= \frac{\prod_i X_i^{\nu_{ij}^*}}{\prod_i X_i^{\nu_{ij}}} (\rho_\infty^*)^{\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})} \\ &= C_s \cdot p^{-\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})} \cdot \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^{\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})} \cdot K_{jp}(T) \end{aligned}$$

与压力无量纲过程相关的参数:

$$C_s = \left( \frac{\rho_\infty^* u_\infty^{*2}}{101325} \right)^{-\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})} (\rho_\infty^*)^{\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})} = \left( \frac{u_\infty^{*2}}{101325} \right)^{-\sum_i (\nu_{ij}^* - \nu_{ij})}$$

由于非平衡流动中扩散项  $F_v$ 、 $G_v$  和  $H_v$  中粘性系数、热传导系数和组分扩散系数相关理论也不成熟, 采用下面简化方法近似处理:

(1) 混合气体 Prandtl 数和 Lewis 数为常数:

$$\text{Pr} = \frac{C_{\mu}^* \mu^*}{\lambda^*} = 0.72, \quad \text{Sc} = \frac{\mu^*}{\rho^* D_i^*} = 1.0$$

(2) 单位质量混合气体的“冻结”定压比热采用下式计算:

$$\begin{aligned} C_{\mu}^* &= \frac{\partial h^*(T^*)}{\partial T^*} \bigg|_{p, c_i} = \sum_i c_i \frac{\partial h_i^*(T^*)}{\partial T^*} = \sum_i c_i C_{\mu i}^* \\ \frac{C_{\mu}^*}{R_\infty^*} &= \sum_i c_i \frac{C_{\mu i}^*}{R_i^*} \frac{\bar{M}^*}{M_i^*} \end{aligned}$$

组元变化除了受化学反应过程控制外, 还受到流动传输过程的影响, 直接应用以上非齐次波动方程的时间分裂法会导致计算发散, 新型解耦法与国外提出的解耦算法的差异在于, 先对方程进行变换, 然后再采用时间分裂法进行解耦处理。

首先, 对以上流体微团的内能表达式  $E^a$ , 引入中间变量:

$$E = E^a - \sum_{i=1}^n \rho_i h_i^0 = 0.5 \rho (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\gamma - 1}$$

这相当于把内能表达式中与流场温度变化没有关系的生成焓  $h_i^0$  去掉, 从形式上与量热完全气体相同,  $\gamma$  从数学形式来看等价于量热完全气体方程的比热比:

$$\gamma = \frac{p}{\sum_{i=1}^n \rho_i h_i - p} + 1 \quad (11.9)$$

气体动力学中化学反应混合气体的比热比可以根据热力学定义严格推导出, 本书为了推导方程简便引入  $\gamma$  符号, 称为等效比热比, 不是常数。严格来说, 这里  $\gamma$  不符合热力学中的比热比定义, 可以仅看作一个中间变量, 符号并无物理意义。

记以新的内能表达式  $E$  为基础的求解变量为  $U_0$ , 对控制方程进行变换, 然后, 将变量  $U_0$  的基本方程分别写为三个变量  $U_1$ 、 $U_2$  和  $U_3$  的方程组。

变量  $U_2 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$  对应的齐次方程组从数学形式来看等价于量热完全气体 NS 方程, 如果在计算量热完全气体 NS 方程的程序基础上改编, 仅需增加等效比热比  $\gamma$  的子程序, 然后对粘性项中修改计算定压比热公式、考虑组分质量扩散引起的传热, 就可以得到算子  $L_1(\Delta t)$ 。

变量  $U_2 = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho k, \rho \epsilon)^T$  对应的齐次方程组, 离散算子记为  $L_2(\Delta t)$ , 具体计算方法与算子  $L_1(\Delta t)$  的完全相似。从形式上来看, 变量  $U_1$  和变量  $U_2$  的方程组互不相关, 但是本质上化学反应引起流体微团内部组分的变化 (即  $U_2$  变量) 通过等效比热比  $\gamma$  影响变量  $U_1$ 。

变量  $U_3$  满足的方程组是与空间导数无关的常微分方程组:

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} = S_3 \quad (11.10)$$

式中符号:

$$U_3 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho k, \rho \epsilon)^T$$

$$S_3 = (0, 0, 0, 0, - \sum_{i=1}^n h_i^0 \cdot \sigma_i, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, S_k, S_\epsilon)^T$$

变量  $U_3$  方程组仅包含出发方程的变量  $U_0$  的源项部分, 离散算子记为  $L_3(\Delta t)$ 。原理上  $L_3(\Delta t)$  可以同时考虑湍流和非平衡模型; 但是在构造算子和编写程序时实际上分别处理, 进一步分为反应算子  $L_{\text{react}}(\Delta t)$  和湍流算子  $L_{\text{tr}}(\Delta t)$ 。

为便于论述, 离散算子  $L_1(\Delta t)$  和  $L_2(\Delta t)$  称为流动算子,  $L_3(\Delta t)$  称为源项算子, 根据时间分裂格式, 采用时间空间二阶精度差分格式计算这三个算子, 那么如下的总算子  $L(\Delta t)$  表示为:

$$L(\Delta t) = L_1\left(\frac{\Delta t}{2}\right) L_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) L_3(\Delta t) L_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) L_1\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad (11.11)$$

根据前面分析,那么总算子具有时间和空间二阶精度。

文献[38]中在有限差分法基础上建立以上新型解耦算法,对流项采用时间和空间均为二阶精度的 NND2M 差分格式离散,不能直接向有限体积法推广。为此,采用二阶的 Runge-Kutta 方法进行时间推进,采用前面介绍的格心格式的有限体积方法离散变量  $U_1$  和变量  $U_2$  的方程组,格林公式计算单元内变量梯度,为了抑制物理量间断处可能出现的数值振荡,采用了 Venkatakrishnan 限制器,可以得到时间和空间二阶精度流动算子  $L_1(\Delta t)$  和  $L_2(\Delta t)$ 。

由于源项算子  $L_3(\Delta t)$  不涉及空间变量,因此可以在格心点上直接求解。描述化学反应部分的是一个刚性的常微分方程组,并且源项具有强烈的非线性。数值计算和理论分析表明,用显式方法计算刚性常微分方程组时,为保证计算的稳定性,时间步长应比最小的反应特征时间小,而一般情况下快反应和慢反应的特征时间尺度相差好几个量级,因此用显式方法计算化学反应方程组是不切实际的。

本文主要采用梯形公式和拟稳态逼近这两种隐式方法。应用这些方法时,需要将化学反应源项进行线性化处理,即将  $i$  组元质量方程的源项改写为:  $\sigma_i = q_i - p_i \rho_i$ , 为了符合计算方法教科书的习惯,组元密度用  $y_i = \rho_i$  代替,这样求解方程的标准形式为:

$$\frac{dy_i}{dt} = q_i - p_i y_i \quad y_i(0) = y_i^0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (11.12)$$

在采用梯形公式时间推进求解时,如果已知  $y_i^n$ ,那么冻结系数  $q_i$  和  $p_i$ ,即取  $n$  时刻的值,递推公式为:

$$y_i^{n+1} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t p_i}{2}\right) y_i^n + \Delta t q_i}{1 + \frac{\Delta t p_i}{2}} \quad (11.13)$$

梯形公式形式简单,计算效率高,对于线性问题具有二阶精度。

稳态逼近方法从化学反应方程组的特殊形式出发,通过逼近渐近解来求解刚性方程组。由于这种方法是专门针对化学反应计算而设计的,因此在化学反应的计算中使用很广泛。其理论基础是,如果(11.12)中的系数  $q_i$  和  $p_i$  为常数,则有精确解:

$$y_i(t) = y_i(0)e^{-p_i t} + \frac{q_i}{p_i}(1 - e^{-p_i t}) \quad (11.14)$$

当系数  $q_i$  和  $p_i$  在从  $t = 0$  开始的微小时间  $\Delta t$  内变化缓慢,采用初始时刻的

$q_i(0)$  和  $p_i(0)$  近似, 代入上式计算得到是精确解  $y(\Delta t)$  较好的近似值。按照以上思路, 提出了如下的分为预测-修正两步的拟稳态逼近方法。预测步:

$$y_i^* = y_i^n + \frac{(q_i^n - p_i^n y_i^n) \Delta t}{1 + \alpha_i^n p_i^n \Delta t} \quad (11.15.1)$$

式中  $\alpha$  是线化方程中系数  $p_i$  和时间推进步长  $\Delta t$  的函数:

$$\alpha(p, \Delta t) = \frac{1 - \frac{1 - e^{-p\Delta t}}{p\Delta t}}{1 - e^{-p\Delta t}}$$

修正步:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{(\hat{q}_i - \hat{p}_i y_i^*) \Delta t}{1 + \alpha_i^n \hat{p}_i \Delta t} \quad (11.15.2)$$

预测步使用的都是初始值, 修正步既使用初始值也使用预测值:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}(p^n + p^*) \quad \text{和} \quad \hat{q} = \hat{\alpha} q^* + (1 - \hat{\alpha}) q^n$$

以上拟稳态逼近方法对于线性问题是稳定的, 但这并不能保证对于非线性问题也是稳定的。对于反应流计算, 由于求解化学反应部分的时间步长还受流动时间步长限制, 一般不会出现不稳定现象。

### § 11.2.3 新型解耦算法的验证算例

超声速燃烧流场具有高温、高速和参数随空间或时间变化剧烈等特征, 给流场显示和参数测量带来困难, 可供验证计算模拟的实验结果有限, 其中 70 年代初 Lehr 在弹道靶进行的  $H_2/\text{Air}$  预混气体中激波诱导燃烧的自由飞实验照片, 由于计算条件清楚, 成为非平衡流动模拟方法的经典验证模型。

实验环境参数: 温度  $T = 286\text{K}$ , 压力  $P = 320\text{mmHg}$ ;  $H_2/O_2$  理想配比混合气体摩尔组分比例为  $2H_2 + O_2 + 3.76N_2$ , 声速  $403\text{m/s}$ , 可燃气体的理论爆轰速度  $D_{cj} = 2055\text{m/s}$ 。根据实验观测, 模型飞行速度  $V < D_{cj}$ , 弹头绕流场为脱体激波—预燃诱导区—燃烧阵面结构; 飞行速度  $V > D_{cj}$ , 增高波后温度加剧反应, 预燃诱导区变薄, 可能使脱体激波与燃烧阵面基本重合, 还出现激波后压力高于驻点值的 Von Neumann spike 现象。这两种情况流动状态稳定, 国内外有许多人进行成功的数值模拟; 基于有限差分法的新型解耦算法也取得很好的效果。

当模型飞行速度接近爆轰速度  $V \approx D_{cj}$  时, 出现了非常复杂的不稳定振荡

燃烧现象, 早期对这一非定常流动现象的数值模拟十分困难, 近年来经过对反应机理、计算方法和网格等影响因素的细致研究, 获得很大进展; 但是依然被认为是“检验非平衡流动模拟算法时间和空间精度的典型问题”。

国内在 2002 年文献中首次模拟得到不稳定振荡燃烧现象, 由于当时计算机条件所限制, 没有详细比对流场细节。下面采用建立在有限体积法基础上的新型解耦算法对这一现象进行模拟, 分析其流场细致结构, 并以此来验证算法的精度和适用性。

化学动力学模型采用 Jachimowski 反应机理 (8 组分 19 反应)。采用轴对称模型计算, 网格如图 11.2 所示, 一种为四边形网格, 单元数为  $200 \times 200$ , 另一种为三角形网格, 单元数为 60 000。Lehr 在实验中发现弹丸飞行马赫数  $M = 4.18$  时开始出现规则的振荡燃烧现象, 随着弹丸速度的增加, 流场的振荡频率逐渐增加, 飞行马赫数达到  $M = 5.10$  时, 流场中的振荡又变得非常不明显。

本文对 Lehr 实验观测到振荡燃烧的三个飞行马赫数 4.18、4.48 和 4.79 进行模拟。

采用四边形网格, 弹丸飞行马赫数  $M = 4.48$  时计算得到的流场参数等值线如图 11.3, 可以看到清晰的振荡燃烧结构, 振荡在激波和物体表面之间, 从 OH 组元等值线知道化学反应发生在燃烧阵面以后, 由于燃烧阵面的上下游温度和声速不同, 扰动传播特性也有变化。



图 11.2 计算网格

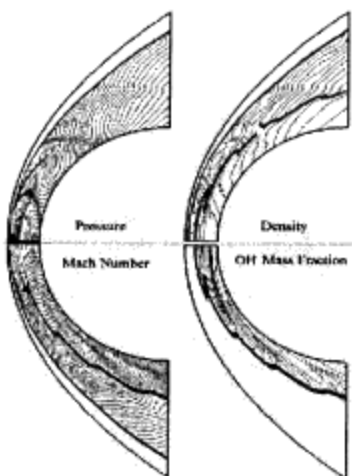


图 11.3 流场等值线

驻点流线上密度随时间的变化如图 11.4 示意, 其中 (a) 和 (b) 是弹丸飞行马赫数  $M = 4.79$  时三角形网格和四边形网格结果比较, 在下面图 11.5 中

比较了驻点压力随时间历程,二者基本一致,计算得到的振荡频率一致,表明计算结果与网格无关。图 11.4 (c) 是马赫数  $M = 4.48$ , 图 11.4 (d) 为马赫数  $M = 4.18$  驻点流线上密度随时间的变化。

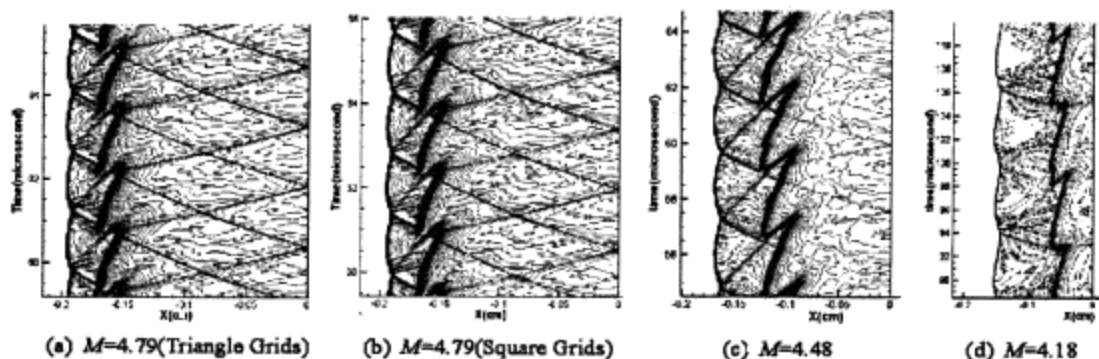


图 11.4 驻点线上密度等值线随时间变化

文献 [39] 对 Lehr 实验的振荡机理进行解释,可燃气沿驻点流线穿越正激波后开始发生分解反应,达到一定条件后发生释放能量的复合反应,从激波到燃烧阵面的距离称为诱导区。在诱导区内微小扰动产生一道压缩波,这道压缩波赶上激波后,使激波强度增强,并形成一道弱反射声波和一道接触间断;压缩波使激波增强,波后温度增加,形成一道接近激波的新的燃烧阵面;新的燃烧阵面后能量释放速率增加,当接触间断抵达原来燃烧阵面的位置时,由于那里已没有了可燃气,不会发生燃烧,因此这里的能量释放速率减少,产生向上游和下游传播的稀疏波,削弱了激波强度,从而使激波的位置恢复到原来的位置,开始下一个振荡周期;如此往复。

由于振荡燃烧在有限范围内进行,同时受流动和化学动力学过程影响,因此振荡频率是综合反映流动特征的重要参数,如果该参数与实验结果符合,就认为流场模拟取得成功。在驻点布置观测点,得到压力随时间历程如图 11.5。在达到等幅振荡以后继续计算一段时间,可以得到振荡频率。计算结果和实验数据比较如表 11.1,二者相差较小,与文献 [40] 的计算结果也符合较好。

本文在理论指导下,把文献 [38] 中建立在有限差分法基础上的新型解耦算法推广到有限体积法中,通过模拟激波诱导振荡燃烧现象,分辨出清晰的流场振荡燃烧结构,计算得到振荡频率与实验结果基本一致,表明这一算法具有时间和空间二阶精度。面对工程应用中复杂外形,非结构网格比结构网格有明显的优势,因此近年来非结构网格算法获得广泛应用。但是,针对非结构网格的非平衡流动算法还较少,本文拓展到非结构网格基础上的新型解耦算法为下

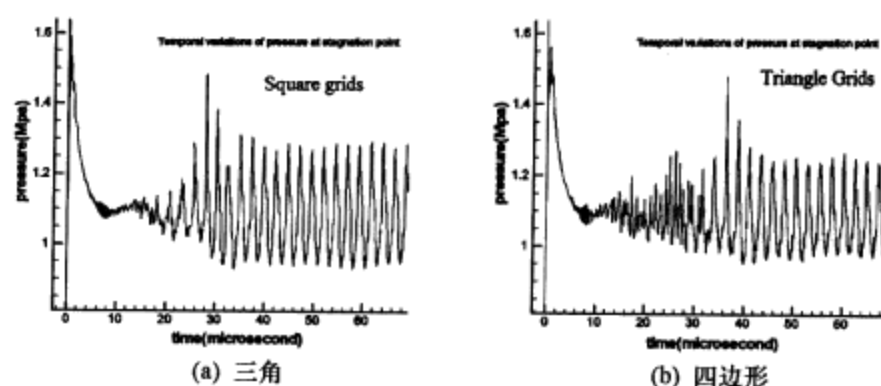


图 11.5 驻点压力历程

一步高超声速流动模拟打下很好的基础。

表 11.1 振荡频率比较 (KHz)

|            | Lehr 实验 | 本文计算 | 文献计算 |
|------------|---------|------|------|
| $M = 4.79$ | 712     | 694  | 701  |
| $M = 4.48$ | 425     | 414  | 431  |
| $M = 4.18$ | 145     | 164  | 163  |

## § 11.3 基于 JWL 方程和点火/生长反应模型的爆炸模拟

### § 11.3.1 爆炸反应流场的混合气体状态方程和反应模型

#### § 11.3.1.1 JWL 状态方程

包含有点火过程、涉及炸药、爆炸产物和空气三种组分的流场控制方程也可以写成以上三维守恒 N-S 方程的形式。但是, 爆轰产物在高温高压高密度状态下, 分子之间的相互作用类似于固体或液体的性态, 随着产物的膨胀, 压力降到环境气压, 分子之间的相互作用又呈现气体性态, 因此, 采用完全气体模型描述爆轰产物是不准确的, 人们采用一些理想化假设, 提出各种模型描述

爆轰产物的物态变化。由于爆轰过程中所发生的各种化学反应的复杂性,各种理论模型都包含一些需用实验测定的常数。

目前,在工程应用上较多的是 Jones-Wilkins-Lee 状态方程,简称 JWL 方程:

$$p = p(\rho, e) = A \left( 1 - \frac{\omega}{R_1 \bar{v}} \right) e^{-R_1 \bar{v}} + B \left( 1 - \frac{\omega}{R_2 \bar{v}} \right) e^{-R_2 \bar{v}} + \omega \rho e \quad (11.16.1)$$

$$p = p(\rho, T) = A e^{-R_1 \bar{v}} + B e^{-R_2 \bar{v}} + \omega \rho C_v T \quad (11.16.2)$$

$$e = e(\rho, T) = \frac{A}{R_1 \rho_0} e^{-R_1 \bar{v}} + \frac{B}{R_2 \rho_0} e^{-R_2 \bar{v}} + C_v T \quad (11.16.3)$$

过 C-J 点的等熵线方程为:

$$p_{CJ} = A e^{-R_1 \bar{v}} + B e^{-R_2 \bar{v}} + C \bar{v}^{-(\omega+1)}$$

其中,  $\rho_0$  为炸药的初始密度, 计算过程中认为不变化;  $\bar{v}$  为相对比容:  $\bar{v} = \rho_0/\rho$ ;  $C_v$  为定容比热, 也看做是常数;  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  和  $\omega$  是常系数, 不同的炸药及其对应产物气体的数据根据实验测定。

下面, 为了推导多组分混合物的状态方程及声速, 首先介绍一般状态方程下的声速公式。

### § 11.3.1.2 一般状态方程下的声速公式

对于满足 Mie-Grüneisen 状态方程的流体模型, 其压力可以由密度和内能显式地给出, 状态方程的一般形式为

$$p = p(\rho, e) \quad (11.17)$$

其中  $p$  为压力,  $\rho$  为密度,  $e$  为单位质量内能。

比较常见的 Mie-Grüneisen 状态方程包括理想和刚性气体模型、JWL 状态方程、Cochran-Chan (CC) 状态方程和 Shock-Wave (HOM) 状态方程等。

由熵的定义及热力学第一定律,

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{de + p dV}{T}$$

其中  $s$  为熵,  $Q$  为热量,  $T$  为温度,  $V = 1/\rho$  为比容。

等熵条件下, 在上式中  $ds = 0$ , 于是可得

$$de = -p dV = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

此时

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho de = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e d\rho + \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho d\rho$$

根据声速定义,可以得到

$$a^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e + \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \quad (11.18)$$

这样,就建立了声速与状态方程之间的关系,若已知物质的状态方程,就可根据上式求得其声速。

### § 11.3.1.3 炸药与爆轰产物的混合物状态方程

炸药中的化学反应过程是十分复杂的,严格的化学动力学研究十分困难,通常认为内部仅包含未反应炸药和爆轰产物气体两种物质。如果组分  $i = 1$  标示未反应炸药,组分  $i = 2$  标示爆轰产物气体,二者均满足以上 JWL 状态方程。Lee & Tarver 指出,采用 JWL 状态方程计算爆轰问题时,在炸药与爆轰产物间应采用等压假设。根据这一假设,未反应炸药与反应产物间:(1) 具有体积可加性,即每个微元内的混合物质体积等于这两种物质组分的体积之和;(2) 处于动力学平衡状态,即每个微元内的这两种组分具有相同的压力和速度;(3) 处于热力学非平衡状态,即每个微元内的这两种组分拥有各自的温度和内能。

根据等压假设,有

$$p = p_i = A_i \left( 1 - \frac{\omega_i}{R_{1i}\bar{v}} \right) e^{-R_{1i}\bar{v}} + B_i \left( 1 - \frac{\omega_i}{R_{2i}\bar{v}} \right) e^{-R_{2i}\bar{v}} + \omega_i \rho e_i \quad (11.19)$$

其中  $\bar{v} = \rho_0 / \rho$ 。

混合物的内能为

$$\rho e = \sum_{i=1}^2 \rho_i e_i \quad (11.20)$$

联立 (11.19) (11.20) 两式,消去  $e_i$ , 便可得到混合物的状态方程:

$$p = \frac{\rho^2 e + C_2}{C_1} \quad (11.21)$$

将上式代入声速公式 (11.18), 得到混合气体的声速为

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e + \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho = \frac{p + \frac{C_2}{\rho}}{C_1} \quad (11.22)$$

为便于表达,上式中引入的中间变量符号:

$$C_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\omega_i}$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\omega_i} \left[ A \left( 1 - \frac{\omega \rho}{R_1 \rho_0} \right) e^{-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}} + B \left( 1 - \frac{\omega \rho}{R_2 \rho_0} \right) e^{-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}} \right]_i$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\omega_i} \left[ A e^{-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}} \left( R_1 \frac{\rho_0}{\rho} - \omega - \omega \frac{\rho}{R_1 \rho_0} \right) + B e^{-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}} \left( R_2 \frac{\rho_0}{\rho} - \omega - \omega \frac{\rho}{R_2 \rho_0} \right) \right]_i$$

上述混合气体的状态方程 (11.21) 及声速公式 (11.22) 均无需迭代求解, 计算效率较高。

### § 11.3.1.4 反应率模型

目前对化学反应动力学过程的模拟还处在使用唯象模型的阶段, 所使用的反应率函数基本上依靠拟合实验数据得到, 还是半经验和表征宏观性质的, 即反应率只表现为一些热力学量的函数。目前使用较为普遍的是 Lee 和 Tarver 提出的“点火-生长”反应模型<sup>[41]</sup>:

$$\frac{d\lambda}{dt} = I(1-\lambda)^a \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^b + G(1-\lambda)^a \lambda^c p^d \quad (11.23)$$

式中产物的质量分数  $\lambda = \rho_2/\rho$  称为反应度,  $I$ 、 $G$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  是与炸药有关的六个可调系数。文献对所有炸药采用  $a = 2/9$ 、 $b = 4$  和  $c = 2/3$  保持不变, 其余三个系数根据不同炸药的拟合实验数据得到。

以上“点火-生长”反应模型中, 第一项表示热点的形成, 反映了未反应炸药在冲击波作用下的相对压缩度  $(\rho/\rho_0 - 1)$  对反应过程的影响, 压缩度越大, 冲击波所产生的热点就越多, 温度也越高, 反应也就越强。第二项表述反应度随着内部组分和压力的变化。

以上反应模型能较好的模拟 ZND 模型的稳定爆轰波结构, 以及一维和二维冲击起爆实验, 但对短脉冲冲击起爆不能得到满意的结果。对短脉冲冲击起爆数据的分析表明, 非均匀炸药的冲击起爆至少要用三个阶段来描述, 即热点的成核-生长-汇合过程。第一个阶段是热点的形成及点火, 第二个阶段是一系列孤立热点的相当慢的反应成长, 第三个阶段中反应热点发生汇合, 大范围内的反应快速完成。基于以上认识, Tarvel 和 Lee 等将反应速率改进为如下三项形式, 依次表示点火、燃烧和快反应:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \begin{cases} I_1(1-\lambda)^a \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 - I_2 \right)^b \triangleq F_1 & 0 < \lambda < \lambda_{igmax} \\ F_1 + G_1(1-\lambda)^c \lambda^d p^e \triangleq F_2 & 0 < \lambda < \lambda_{G1max} \\ F_2 + G_2(1-\lambda)^f \lambda^g p^h & \lambda_{G2min} < \lambda < 1 \end{cases} \quad (11.24)$$

式中  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $G_1$ 、 $G_2$  四个系数和从  $a$  到  $h$  八个指数与炸药有关的常数,  $\lambda_{ig\max}$ 、 $\lambda_{G1\max}$  和  $\lambda_{G2\min}$  用来使三项中的每一项在合适的值时开始或截断, 也与炸药有关。

根据反应模型得到反应速率函数:

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda)$$

就可以写出控制方程中质量方程和能量方程对应的源项:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -(\rho_1 + \rho_2)f(\lambda) \\ \sigma_2 &= (\rho_1 + \rho_2)f(\lambda) \\ Q_E &= (\rho_1 + \rho_2)f(\lambda)Q_{TNT}\end{aligned}\quad (11.25)$$

式中  $Q_{TNT}$  是炸药的爆热, 对于标准 TNT 炸药,  $Q_{TNT} = 4.46\text{MJ/kg}$ 。

以上推导中, 假设计算区域或网格中流体介质是未反应炸药和爆轰产物气体组成的混合物, 如果炸药在空气或水中爆炸, 还需要建立描述包含两种以上组分的混合气体的状态方程模型。下面首先讨论爆轰产物与空气混合物的状态方程, 最后推导出包含炸药、爆轰产物与空气三种组分的混合物的状态方程和声速公式。

在下文中作如下约定: 下标 1 代表炸药, 下标 2 代表爆轰产物, 下标 3 代表空气。

### § 11.3.1.5 爆轰产物与空气混合物的状态方程

观察 JWL 状态方程 (11.16) 式可以发现, 如果令  $A = B = 0$ , 则 JWL 状态方程就退化为量热完全气体的状态方程, JWL 状态方程中的  $\omega$  相当于完全气体中的  $\gamma - 1$ ,  $\gamma$  为比热比。因此, 可以完全气体状态方程写为 JWL 状态方程的形式, 下文均采用这一方法以简化公式的推导和书写。

对爆轰产物与空气的混合气体, 采用局部动量平衡和热力学平衡假设, 也即在爆炸流场的任意一个流体微元内, 这两种组分的温度、速度相同, 压力满足分压定理。

根据能量守恒, 结合状态方程 (11.16.3) 式, 写出混合物的能量方程:

$$\rho e = \sum_{i=2}^3 \rho_i e_i = C_1 + C_2 T \quad (11.26)$$

其中:

$$C_1 = \sum_{i=2}^3 \left( A \frac{\rho}{R_1 \rho_0} e^{-R_1 \frac{p_0}{\rho}} + B \frac{\rho}{R_2 \rho_0} e^{-R_2 \frac{p_0}{\rho}} \right)_i, \quad C_2 = \sum_{i=2}^3 \rho_i C_{vi}$$

组分 3 为空气,  $A_3 = B_3 = 0$ 。

根据混合气体分压定理, 结合状态方程 (11.16.2) 式, 有:

$$p = \sum_{i=2}^3 p_i = C_3 + C_4 T \quad (11.27)$$

其中:

$$C_3 = \sum_{i=2}^3 (A e^{-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}} + B e^{-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}})_i, \quad C_4 = \sum_{i=2}^3 w_i \rho_i C_{ui}$$

联立以上两式, 消去  $T$ , 就可以得到混合气体的状态方程:

$$p = \frac{C_4}{C_2} (\rho e - C_1) + C_3 \quad (11.28)$$

根据 (11.18) 式, 进一步推导出混合气体的声速为:

$$a = \sqrt{\frac{C_5 + \left( \frac{C_4}{C_2} + 1 \right) (p - C_3)}{\rho}} \quad (11.29)$$

其中:

$$C_5 = \sum_{i=2}^3 \left( A \frac{R_1 \rho_0}{\rho} e^{-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}} + B \frac{R_2 \rho_0}{\rho} e^{-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}} \right)_i$$

### § 11.3.1.6 炸药、爆轰产物与空气的混合物的状态方程

当同时考虑炸药、爆轰产物与空气三种组分时, 假设两种气体组分 (爆轰产物与空气) 间满足动力学、热力学平衡和分压定理, 而气体组分与固体组分 (炸药) 间具有体积可加性且压力平衡。具体地说, 有如下几点:

(1) 每个流体微元的体积可分为两部分, 分别为固体组分和气体组分所占据;

(2) 气体组分间热力学平衡:  $T_{23} = T_2 = T_3$ , 压力满足分压定理:  $p_{23} = p_2 + p_3$ ;

(3) 气体与固体组分间压力平衡:  $p_1 = p_{23}$ , 温度不等:  $T_1 \neq T_{23}$ ;

(4) 所有组分的速度都相等。

微元内混合物的分布如图 11.6 所示。如果微元的体积为  $dV$ , 那么

$$dV_1 = \frac{\rho_1}{\rho} dV, \quad dV_{23} = \frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho} dV$$

首先考虑气相。在微元  $dV_{23}$  内, 爆轰产物和空气的质量分别为  $\rho_2 dV$  和  $\rho_3 dV$ , 在此微元内其密度分别为

$$\rho_2' = \frac{\rho_2 dV}{dV_{23}} = \rho \frac{\rho_2}{\rho_2 + \rho_3}, \quad \rho_3' = \frac{\rho_3 dV}{dV_{23}} = \rho \frac{\rho_3}{\rho_2 + \rho_3}$$

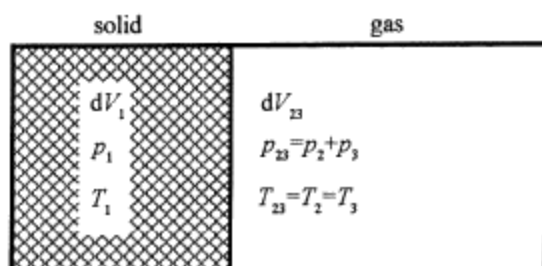


图 11.6 微元内混合物的分布

根据 (11.28) 式可得微元  $dV_{23}$  内压力与内能的关系式:

$$p_{23} = \sum_{i=2}^3 p_i = \frac{C_4}{C_2} \left( \sum_{i=2}^3 \rho_i e_i - C_1 \right) + C_3 \quad (11.30)$$

上式中各系数的表达式与 (11.28) 式略有不同:

$$C_1 = \sum_{i=2}^3 \left( \frac{A_i \rho_i}{R_{1i} \rho_{0i}} e^{-R_{1i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i}} + \frac{B_i \rho_i}{R_{2i} \rho_{0i}} e^{-R_{2i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i}} \right), \quad C_2 = \sum_{i=2}^3 \rho_i C_{ui}$$

$$C_3 = \sum_{i=2}^3 \left( A_i e^{-R_{1i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i}} + B_i e^{-R_{2i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i}} \right), \quad C_4 = \sum_{i=2}^3 w_i \rho_i' C_{ui}$$

然后考虑固相, 在微元  $dV_1$  内, 炸药的密度为  $\rho_1' = \frac{\rho_1 dV}{dV_1} = \rho_0$ . 根据状态方程 (11.16.1), 有

$$p_1 = A_1 \left( 1 - \frac{\omega_1 \rho_1'}{R_{11} \rho_{01}} \right) e^{-R_{11} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} + B_1 \left( 1 - \frac{\omega_1 \rho_1'}{R_{21} \rho_{01}} \right) e^{-R_{21} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} + \omega_1 \rho_1' e_1 \quad (11.31)$$

联立 (11.30) 与 (11.31) 两式, 根据压力平衡条件  $p = p_1 = p_{23}$ , 可得到包含炸药、爆轰产物、空气的混合物的状态方程:

$$\rho e = \left( \frac{C_2}{C_4} + C_6 \right) p + C_1 - \frac{C_2}{C_4} C_3 - C_7 \quad (11.32)$$

上式中的系数为

$$C_6 = \frac{\rho_1}{\rho \omega_1}, \quad C_7 = \frac{\rho_1}{\rho \omega_1} \left[ A_1 \left( 1 - \frac{\omega_1 \rho_1'}{R_{11} \rho_{01}} \right) e^{-R_{11} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} + B_1 \left( 1 - \frac{\omega_1 \rho_1'}{R_{21} \rho_{01}} \right) e^{-R_{21} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} \right]$$

可以证明, 当  $\rho_1 = 0$  时, (11.32) 式便退化为 (11.28) 式, 即仅含爆轰产物与空气的混合物状态方程; 当  $\rho_3 = 0$  时, (11.32) 式便退化为 (11.21) 式, 即炸药与爆轰产物的混合物的状态方程。

将 (11.32) 式分别对  $\rho$  和  $e$  求导, 得到  $\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e$  和  $\left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho$ , 再根据 (11.18) 式便可得到此时的声速。推导过程比较繁琐, 这里仅给出最后结果:

$$a^2 = \frac{1}{C_8 \rho} \left[ (1 + C_8) p + C_1 - C_7 - C_9 + C_{11} + \frac{C_2}{C_4} (C_{10} - C_3) \right] \quad (11.33)$$

上式中的系数为

$$C_8 = \frac{C_2}{C_4} + C_6$$

$$C_9 = \sum_{i=2}^3 \frac{\rho_i}{\rho_i'} \left[ A_i \left( 1 + \frac{\rho_i}{R_{1i} \rho_{0i}} \right) e^{-R_{1i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i'}} + B_i \left( 1 + \frac{\rho_i}{R_{2i} \rho_{0i}} \right) e^{-R_{2i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i'}} \right]$$

$$C_{10} = \sum_{i=2}^3 \left( A_i \frac{R_{1i} \rho_{0i}}{\rho_i} e^{-R_{1i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i'}} + B_i \frac{R_{2i} \rho_{0i}}{\rho_i} e^{-R_{2i} \frac{\rho_{0i}}{\rho_i'}} \right)$$

$$C_{11} = \frac{\rho_1}{\rho \omega_1} \left\{ A_1 e^{-R_{11} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} \left[ \frac{R_{11} \rho_{01}}{\rho_1'} - \omega_1 \left( 1 + \frac{\rho_1'}{R_{11} \rho_{01}} \right) \right] \right. \\ \left. + B_1 e^{-R_{21} \frac{\rho_{01}}{\rho_1'}} \left[ \frac{R_{21} \rho_{01}}{\rho_1'} - \omega_1 \left( 1 + \frac{\rho_1'}{R_{21} \rho_{01}} \right) \right] \right\}$$

## § 11.3.2 验证算例

为了验证计算方法的准确性,分别采用 PBX9404 和 TNT 的一维平面爆轰、空气中球形装药爆炸等算例对程序进行考核。算例中所使用的 PBX9404 和 TNT 的 JWL 状态参数以及“点火-生长”模型中的系数如表 11.2 至表 11.4 所示。

### § 11.3.2.1 PBX9404 一维爆轰

考虑 PBX9404 的一维平面爆轰问题。计算网格的密度为 100 点/mm,在左端固壁处的 10 个网格内以 C-J 状态起爆炸药。计算所用的状态参数及反应常数分别在表 11.2 和表 11.4 中列出。

表 11.2 PBX9404 的状态参数

| 系数       | 单位                | 未反应炸药   | 爆轰产物  |
|----------|-------------------|---------|-------|
| $A$      | GPa               | 6 969   | 852.4 |
| $B$      | GPa               | -172.7  | 18.02 |
| $R_1$    | 1                 | 7.8     | 4.6   |
| $R_2$    | 1                 | 3.9     | 1.3   |
| $\omega$ | 1                 | 0.857 8 | 0.38  |
| $C_v$    | MJ/kg/K           | 2.505   | 1.0   |
| $\rho_0$ | kg/m <sup>3</sup> | 1 842   | 1 842 |

表 11.3 TNT 的状态参数

| 系数       | 单位                | 未反应炸药    | 爆轰产物   |
|----------|-------------------|----------|--------|
| $A$      | GPa               | 17 101   | 673.1  |
| $B$      | GPa               | -3.745   | 21.988 |
| $R_1$    | 1                 | 19.8     | 5.4    |
| $R_2$    | 1                 | 0.98     | 1.8    |
| $\omega$ | 1                 | 0.567 5  | 0.3    |
| $C_V$    | MJ/kg/K           | 2.703 86 | 1.0    |
| $\rho_0$ | kg/m <sup>3</sup> | 1 570    | 1 570  |

表 11.4 “点火-生长”模型的反应系数

| 参数  | 单位                                            | PBX9404 | TNT |
|-----|-----------------------------------------------|---------|-----|
| $I$ | $\mu\text{s}^{-1}$                            | 44      | 50  |
| $G$ | $\mu\text{s}^{-1} \cdot (100\text{GPa})^{-z}$ | 200     | 360 |
| $z$ | 1                                             | 1.6     | 1.2 |

图 11.7 给出了点火后 1.2 微秒内的爆轰波压力波形的变化,可以看出,点火后压力先有下降,随着化学反应的进行,压力逐渐恢复,在 0.6 微秒以

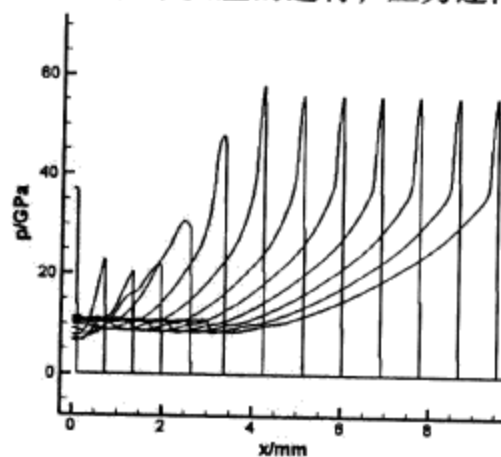


图 11.7 点火后 1.2 微秒内的爆轰波波形 (绘图间隔: 0.1 微秒)

后, 波阵面的压力就基本维持不变, 说明此时已经形成稳定自持的爆轰, 压力的 Van Neumann 峰值越在 56GPa 左右。表 11.5 列出了计算结果与实验值的比较, 其中  $D$  为爆速,  $P_s$  为压力峰值,  $u_s$  为速度峰值,  $P_{CJ}$  和  $u_{CJ}$  分别是 C-J 点的压力和速度。C-J 点的判断标准为  $u = D - c$ ,  $u$ 、 $c$  分别为当地速度和声速。

表 11.5 计算结果与实验值的比较

| 参数       | 单位  | 实验值   | 计算值     | 误差    |
|----------|-----|-------|---------|-------|
| $D$      | m/s | 8 800 | 8 802.5 | 0.03% |
| $p_s$    | GPa | 56.3  | 55.8    | 0.89% |
| $u_s$    | m/s | 3 470 | 3 439   | 0.89% |
| $p_{CJ}$ | GPa | 37    | 37.0    | 0.00% |
| $u_{CJ}$ | m/s | 2 290 | 2 278.5 | 0.50% |

可以看出, 计算值与实验值符合的很好, 误差均在 1% 以内。

### § 11.3.2.2 网格大小对一维平面爆轰波计算结果的影响

采用不同大小的网格计算了 PBX9404 和 TNT 的一维爆轰, 结果比较如表 11.6 和表 11.7 所示, 表中的 “/” 表示无法分辨出 C-J 点参数。从表中可以得出以下结论:

- (1) 峰值压力、峰值速度随网格的增大而减小;
- (2) 峰值压力大于 C-J 压力时, 均能分辨出 C-J 点, 且 C-J 点参数与实验值相差不大;
- (3) 峰值压力小于 C-J 压力时, 不能分辨出 C-J 点;
- (4) 网格大于 1mm 时, 计算得到的爆速随网格增大而迅速增大。

表 11.6 不同网格大小下 PBX9404 一维爆轰的计算结果

| $dx$  | $D$     | $p_s$ | $u_s$   | $p_{CJ}$ | $u_{CJ}$ |
|-------|---------|-------|---------|----------|----------|
| mm    | m/s     | GPa   | m/s     | GPa      | m/s      |
| 实验值   | 8 800   | 56.3  | 3 470   | 37       | 2 290    |
| 0.005 | 8 815   | 56.2  | 3 461.0 | 37       | 2 282.4  |
| 0.01  | 8 802.5 | 55.8  | 3 439   | 37       | 2 278.5  |
| 0.02  | 8 790   | 54.9  | 3 389.3 | 36.9     | 2 278.1  |
| 0.05  | 8 760   | 52.3  | 3 234.9 | 37.3     | 2 297.8  |
| 0.1   | 8 720   | 48.7  | 2 983.9 | 37.6     | 2 313.3  |
| 0.2   | 8 604   | 42.3  | 2 607.1 | 36.4     | 2 289.2  |
| 0.5   | 8 440   | 33.4  | 2 075.1 | /        | /        |
| 1     | 8 890   | 28.8  | 1 756.6 | /        | /        |
| 2     | 9 330   | 24.6  | 1 413.7 | /        | /        |
| 5     | 10 210  | 21.7  | 1 141.8 | /        | /        |
| 10    | 11 882  | 20.8  | 1 050.8 | /        | /        |

表 11.7 不同网格大小下 TNT 一维爆轰的计算结果

| $dx$  | $D$    | $p_s$ | $u_s$   | $p_{CJ}$ | $u_{CJ}$ |
|-------|--------|-------|---------|----------|----------|
| mm    | m/s    | GPa   | m/s     | GPa      | m/s      |
| 实验值   | 6 849  |       |         | 19       |          |
| 0.005 | 6 875  | 49.3  | 4 355.9 | 19.17    | 1 699.1  |
| 0.01  | 6 920  | 47.8  | 4 191.9 | 19.19    | 1 703.7  |
| 0.02  | 6 910  | 44.3  | 3 860.7 | 19.14    | 1 700.8  |
| 0.05  | 6 920  | 37.5  | 3 348.0 | 19.17    | 1 701.3  |
| 0.1   | 6 930  | 33.6  | 2 895.2 | 19.15    | 1 704.1  |
| 0.2   | 6 930  | 28.5  | 2 450.6 | 19.17    | 1 704.7  |
| 0.5   | 6 920  | 22.3  | 1 980.3 | 19.18    | 1 701.5  |
| 1     | 6 950  | 16.9  | 1 491.6 | /        | /        |
| 2     | 7 600  | 12.8  | 1 037.0 | /        | /        |
| 5     | 9 500  | 11.4  | 816.3   | /        | /        |
| 10    | 11 370 | 11.0  | 714.6   | /        | /        |

图 11.8 是用不同网格计算出的 TNT 爆轰波形的比较, 可以看出,  $\Delta x = 0.005\text{mm}$  时, 压力的 Von Neumann 峰值很高, 约为  $49.3\text{GPa}$ , 此时的反应区 (先导冲击波到 C-J 点之间的区域) 很窄, 不到  $1\text{mm}$ ;  $\Delta x = 0.5\text{mm}$  时, Von Neumann 峰值降为  $22.3\text{GPa}$ , 但仍可准确得到 C-J 点参数;  $\Delta x = 1\text{mm}$  时, 压力波形上已看不出 Von Neumann 峰值的结构, 在压力峰值处形成一平台区;  $\Delta x = 2\text{mm}$  时, 压力平台更宽, 压力更低。比较这四个算例, 它们的膨胀波波形是基本一致的, 膨胀波后、爆源附近的静止区压力也是十分接近的, 均在  $5.7\text{GPa}$  左右。

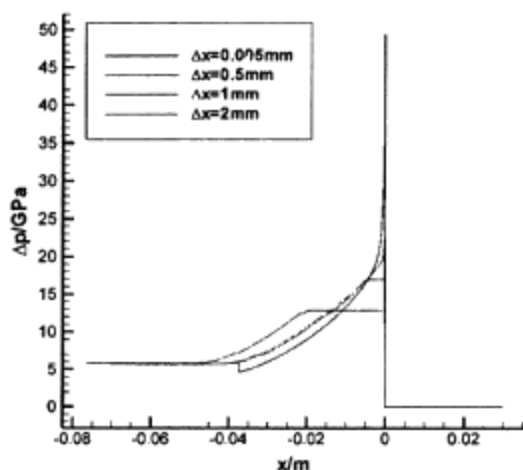


图 11.8 不同网格的爆轰波波形比较

### § 11.3.2.3 空气中球形爆炸波

采用“点火—生长”模型计算球形 TNT 装药在空气中的爆炸, 装药半径为  $0.1\text{m}$ , 当量  $6.8\text{kg}$  TNT, 从球心开始点火, 计算模型如图 11.9 所示。点火后, 首先在 TNT 装药内形成散心球面爆轰波, 此爆轰波到达装药与空气的交界面后, 引起在空气中传播的冲击波, 冲击波后压力远小于爆轰波峰值压力, 且随着传播距离的增大而迅速衰减。图 11.10 给出了 4 个不同时刻的冲击波压力波形。

将计算得到的超压峰值与经验公式进行比较。该经验公式为:

$$\Delta p = 0.658 \frac{W}{R^3} + 0.261 \left( \frac{W}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{MPa})$$

其中,  $W$  的单位为  $\text{kg}$ ,  $R$  的单位为  $\text{m}$ 。该公式的适用范围为  $0.473 < R/W^{\frac{1}{3}} < 7.6$ 。

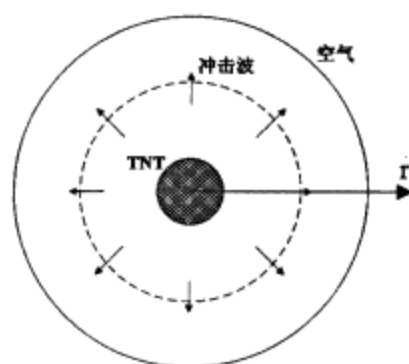


图 11.9 计算模型及区域

图 11.11 给出了两套疏密不同的网格的计算结果与实验公式的比较。从上一节一维爆轰波的计算来看,  $\Delta x = 0.1\text{mm}$  和  $2\text{mm}$  的差异是十分明显的,  $\Delta x = 0.1\text{mm}$  可以得到准确的爆速、C-J 点参数, 峰值压力为  $33.6\text{GPa}$ ; 而  $\Delta x = 2\text{mm}$  时, 爆速偏大、无 C-J 点、存在压力平台, 峰值压力仅  $12.8\text{GPa}$ 。但从图 11.11 来看, 两套网格得到的远场超压峰值极为一致, 可见, 爆轰波计算的差异对远场压力的影响不大。

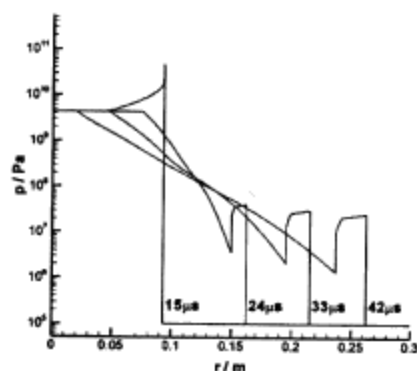


图 11.10 不同时刻的压力波形

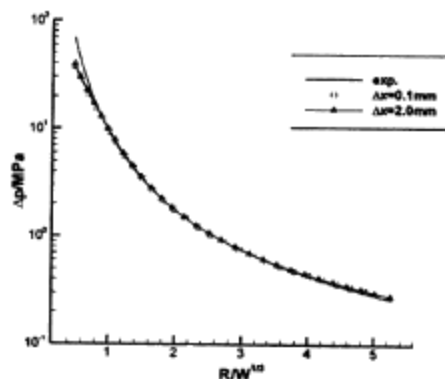


图 11.11 超压峰值的比较

### § 11.3.2.4 管状装药

计算模型如图 11.12 所示, 在墙壁上安装有与之垂直的药管, 药管内放置柱状炸药, 炸药与管壁间为静止空气。在管口处点火, 点火后, 爆轰波沿着药柱向管内传播, 同时高压的爆轰产物会向外围的空气中飞散。在计算中完整考虑了炸药、爆轰产物、空气三种组分, 采用“点火-生长”模型模拟化学反应过程。

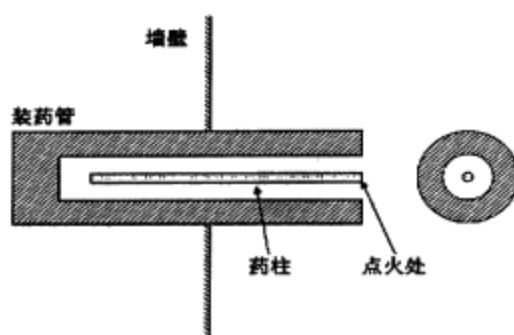


图 11.12 装药示意图

图 11.13 显示了爆轰波在药柱内传播时的流场结构。由于药柱的长度相对其直径很大，因而爆轰波阵面的强度会逐渐稳定，其结构类似于有限直径装药中的二维爆轰波。图中上方是  $\lg p$  的等值线，下方是  $\lg \rho$  的等值线，等值线是从全场的最大值到最小值等间距取 50 条。可以看出，同一维平面爆轰波不同，先导冲击波略呈弧形；由于爆轰产物的侧向飞散，先导冲击波后拖着一道斜激波，此斜激波打在驱动管管壁后产生一道反射激波。在密度等值线上可进一步看出，静止空气经斜激波压缩后形成一个很薄的压缩空气层，空气层之后便是侧向飞散的爆轰产物，压缩空气层的密度远小于产物气体，二者之间以一道接触间断分开。与此同时，高压的爆轰产物也在向管外飞散，在驱动管出口附近引起了空气中的冲击波；管壁处的反射激波即将在驱动管轴线处相交。

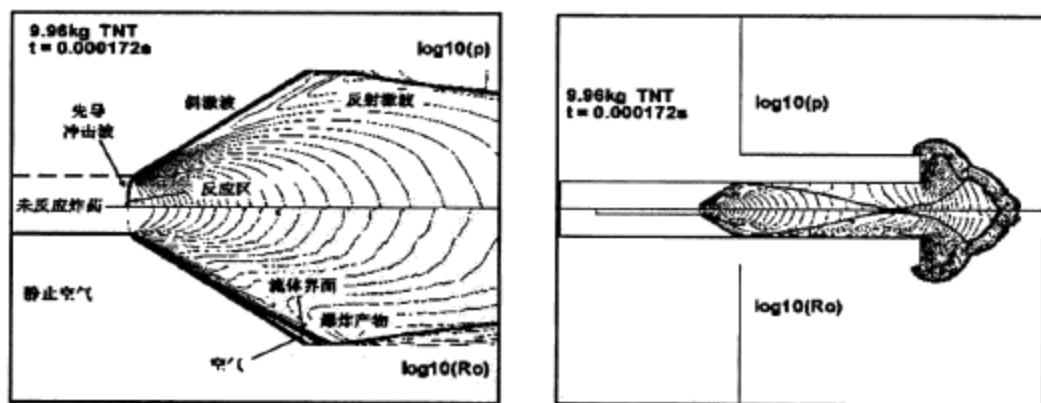


图 11.13 冲击波在装药管内外的传播

## 附录 A 非结构动网格的数据结构 及计算方法

与结构网格相比,三角形/四面体网格具有优异的复杂外形处理能力和网格自适应能力,但由于采用非结构化的数据存储方式,网格节点和单元均采用随机编码,丧失了结构网格中查询的快速性。为了提高计算效率,必须建立一套高效的数据结构,能够在各类网格元素(点、面、体)间快速导航。

### § A.1 基于面的网格数据结构

目前,对于格心格式有限体积方法,通常采用的是基于面的数据结构,节点和单元的查找主要通过面元进行。面元是指控制体的边界面,对四面体网格,面元均为三角形。面元可分为两类:内部面元和边界面元。内部面元的两侧各有一个控制体,边界面元是流场边界的一部分,它的一侧为控制体,另一侧为计算区域外。在基于面的数据结构中,主要存储了以下数组:

表 A.1 存储网格数据的数组

| 变量名             | 描 述                      |
|-----------------|--------------------------|
| xco3d (ip)      | 第 ip 个网格节点的 x 坐标         |
| yco3d (ip)      | 第 ip 个网格节点的 y 坐标         |
| zco3d (ip)      | 第 ip 个网格节点的 z 坐标         |
| lelem (1:4, ie) | 第 ie 个单元的 4 个顶点在全场中的编号   |
| vole (ie)       | 第 ie 个网格单元的体积            |
| xecent (ie)     | 第 ie 个网格单元的中心点的 x 坐标     |
| yecent (ie)     | 第 ie 个网格单元的中心点的 y 坐标     |
| zecent (ie)     | 第 ie 个网格单元的中心点的 z 坐标     |
| ids0 (1:2, is)  | 第 is 个内部面元两侧的单元的在全场中的编号  |
| ids0 (3:5, is)  | 第 is 个内部面元的 3 个顶点在全场中的编号 |
| sc0 (1:3, is)   | 第 is 个内部面元中心点的坐标         |
| sc0 (4:6, is)   | 第 is 个内部面元的面积矢量/面元的法向    |
| ids1 (1, is)    | 第 is 个边界面元所在的单元的编号       |
| ids1 (2:4, is)  | 第 is 个边界面元的 3 个顶点在全场中的编号 |
| sc1 (1:3, is)   | 第 is 个边界面元中心点的坐标         |
| sc1 (4:6, is)   | 第 is 个边界面元的面积矢量/面元的法向    |

上表中,  $sc0(4:6, is)$  和  $sc1(4:6, is)$  分别记录了内部面元和边界面元的面积矢量, 也即面元在  $oyz$ 、 $oxz$ 、 $oxy$  三个坐标平面的投影面积, 该矢量同时也是面元的法向方向, 对内部面元, 从单元  $ids0(1, is)$  指向单元  $ids0(2, is)$ , 对边界面元, 从单元  $ids1(i, is)$  指向流场区域外。

采用软件生成非结构网格后, 将其导出为网格文件供计算程序读入。网格生成软件输出的网格文件往往只包含最基本的网格信息, 一般只包括网格节点的坐标和网格单元的顶点序号, 以及网格的边界信息, 即每个边界的顶点序号及边界条件。因此, 必须在读入网格文件后生成计算所需要的网格数据结构。

生成网格数据结构的主要任务是建立一个面元的列表, 记录各个面元的顶点及其两侧的单元, 也即记录下  $ids0$  和  $ids1$  两个数组。生成数据结构的过程

中要用到临时数组  $ids$ ，其定义为：

$ids(1:3, is)$  第  $is$  个面元 3 个顶点的编号。

$ids(4, is)$  第  $is$  个面元左侧单元的编号。

$ids(5, is)$  第  $is$  个面元右侧单元的编号。对边界，此项为 0。

下面是建立网格数据结构的过程：

(1) 用  $ist$  表示当前已经记录的面元个数，初始时刻  $ist = 0$ 。同时将数组  $ids$  置为零。

(2) 对单元  $ie$ ，提取这个单元的各个表面。每个四面体单元都有四个表面，第一个表面的三个顶点分别为  $lelem(1, ie)$ 、 $lelem(2, ie)$ 、 $lelem(3, ie)$ ，其余依此类推。

(3) 逐一查询这些表面是否已经被记录。已经被记录的标准是，存在一个已记录面元，其顶点序号与待查询面元相同。

(4) 如果待查询的表面未被记录，则将其加入链表，同时将  $ist$  加 1，在  $ids(1:3, ist)$  中记录下此面元的顶点编号，同时令  $ids(4, ist) = ie$ 。

(5) 如果待查询的表面与已记录的面元  $js$  具有相同的顶点编号，说明这两个面元是相同的，则令  $ids(5, js) = ie$ 。

(6) 重复 2-5 步，直至所有单元的表面都已查询完毕。

(7) 最后，根据  $ids(5, is)$  是否为零判断  $is$  是否为边界面元。然后分别将内部面元和边界面元的数组转存至数组  $ids0$  和  $ids1$ 。

上述过程中，最为耗时的是第 3 步的查询过程，为此可以采用链表数据结构加速查找。

## § A.2 刚体运动模块

此模块记录了刚体的运动参数（质心位置、速度、角速度、欧拉角等）以及位于刚体表面的流场边界点。刚体的运动模型有多种，可以是六自由度运动模型，三自由度的二维运动模型，也可以增加其他与具体问题相关的运动模型。

调用刚体运动模型实现刚体运动后，需要更新刚体表面的节点的坐标。需要注意的是，由于误差的积累，计算过程中刚体可能会发生一定的变形；为了避免这一点，需要记录各节点在刚体坐标系下的坐标，移动边界点时保证其在刚体坐标系下的坐标不变。

### § A.3 网格变形模块

采用弹簧近似模型实现网格变形时, 网格弹簧即为网格边, 与之相关的数组为:

表 A.2 弹簧系统及动网格相关数组

| 变量名             | 描 述                         |
|-----------------|-----------------------------|
| pedgep (:, ip)  | 连接 ip 个节点的弹簧的倔强系数           |
| force (1:3, ip) | 第 ip 个节点在弹簧系统中所受的合力         |
| xcon1 (ip)      | n+1 时刻第 ip 个网格点的 x 坐标       |
| ycon1 (ip)      | n+1 时刻第 ip 个网格点的 y 坐标       |
| zcon1 (ip)      | n+1 时刻第 ip 个网格点的 z 坐标       |
| uvf0 (1:3, is)  | 第 is 个内部面元的中心点的运动速度         |
| uvf1 (1:3, is)  | 第 is 个界面元的中心点的运动速度          |
| volen1 (ie)     | 第 ie 个单元在 n+1 时刻的体积         |
| sc0n1 (1:3, is) | n+1 时刻第 is 个内部面元中心点的坐标      |
| sc0n1 (4:6, is) | n+1 时刻第 is 个内部面元的面积矢量/面元的法向 |
| sc1n1 (1:3, is) | n+1 时刻第 is 个界面元中心点的坐标       |
| sc1n1 (4:6, is) | n+1 时刻第 is 个界面元的面积矢量/面元的法向  |

在顶点弹簧模型中, 网格点每时每刻的受力都等于初始受力, 因而数组 force 仅需在程序开始时计算一次, 在计算过程中是不变的。在标准弹簧模型中, 弹簧的倔强系数也只需在程序开始时计算一次, 计算过程中保持不变; 在修正的弹簧倔强系数模型中, 弹簧的倔强系数需要按一定的频率刷新, 一般每隔数百至数千步重新计算一次即可。

网格运动是由边界运动引起的, 在计算过程中, 首先调用刚体运动模块, 实现刚体表面边界点的移动, 然后调用网格变形模块, 具体的步骤为:

1. 求解弹簧系统方程, 得到流场内点的新的坐标 xcon1、ycon1、zcon1;
2. 更新网格数据。包括:
  - 2.1 根据网格点新的坐标计算 uvf0、uvf1。ALE 方法中, 计算面元上的通

量时需要用到面元的运动速度。

2.2 计算  $sc0n1$ 、 $sc1n1$ 。

2.3 计算  $vole1$ 。

## § A.4 流场求解模块

流场求解模块包括的数组有：

表 A.3 流场求解相关数组

| 变量名             | 描 述                       |
|-----------------|---------------------------|
| $u(1:5, ie)$    | 第 $ie$ 个单元格心的基本变量         |
| $up(1:5, ip)$   | 第 $ip$ 个节点处的基本变量          |
| $he(1:5, ie)$   | 第 $ie$ 个单元的通量             |
| $dqdx(1:5, ie)$ | 第 $ie$ 个单元内基本变量对 $x$ 的导数  |
| $dqdy(1:5, ie)$ | 第 $ie$ 个单元内基本变量对 $y$ 的导数  |
| $dqdz(1:5, ie)$ | 第 $ie$ 个单元内基本变量对 $z$ 的导数  |
| $umax(1:5, ie)$ | 第 $ie$ 个单元及其周围单元的基本变量的最大值 |
| $umin(1:5, ie)$ | 第 $ie$ 个单元及其周围单元的基本变量的最小值 |
| $phi(1:5, ie)$  | 第 $ie$ 个单元内的限制器           |

流场求解过程可以分为以下几步：

- (1) 将单元格心的物理量平均至网格点，得到  $up$ ；
- (2) 根据节点物理量，利用 Green 公式，计算单元内物理量梯度  $dqdx$ 、 $dqdy$ 、 $dqdz$ ；
- (3) 记录每个单元及其周围单元的物理量的最大、最小值 ( $umax$ 、 $umin$ )，计算每个单元内的限制器  $phi$ ；
- (4) 对所有面元循环，将其两侧单元  $ie$ 、 $ke$  的物理量分别展开至此面元两侧，计算通量，并将此通量分别加到  $he(:, ie)$  和  $he(:, ke)$  上；
- (5) 对所有单元进行时间积分，得到  $n+1$  时刻的格心物理量。

## § A.5 网格重构模块

网格重构模块包括的数组有：

表 A.4 网格重构相关数组

| 变量名              | 描 述                     |
|------------------|-------------------------|
| xcnew (ip)       | 新网格中第 ip 个节点的 x 坐标      |
| ycnew (ip)       | 新网格中第 ip 个节点的 y 坐标      |
| zcnew (ip)       | 新网格中第 ip 个节点的 z 坐标      |
| lelem2 (1:4, ip) | 新网格中第 ie 个单元的四个顶点的编号    |
| xecent2 (ie)     | 新网格中第 ie 个单元的中心的 x 坐标   |
| yecent2 (ie)     | 新网格中第 ie 个单元的中心的 y 坐标   |
| zecent2 (ie)     | 新网格中第 ie 个单元的中心的 z 坐标   |
| nrelate (ie)     | 新网格中第 ie 个单元中心对应的旧网格的编号 |
| unew (1:5, ie)   | 新网格中第 ie 个单元格心的基本变量     |

网格重构过程可分为以下几步：

(1) 调用网格生成程序，生成新网格；得到 xcnew、ycnew、zcnew、lelem2 等数组；

(2) 计算新网格的单元中心点的坐标 xecent2、yecent2、zecent2；

(3) 调用八叉树“寻点”算法，查找新网格中心点所在的旧网格单元，即生成数组 nrelate；

(4) 调用信息传递算法，将旧网格上流场数据传递至新网格，生成数组 unew；

(5) 采用新的网格，重新生成网格数据结构，计算弹簧系统的倔强系数和节点受力；

(6) 重构完成。采用新的网格和流场数据，继续计算。

采用非结构动网格技术求解包含运动物体的流场的过程是上述各模块计算过程的综合，其流程图如下图所示：

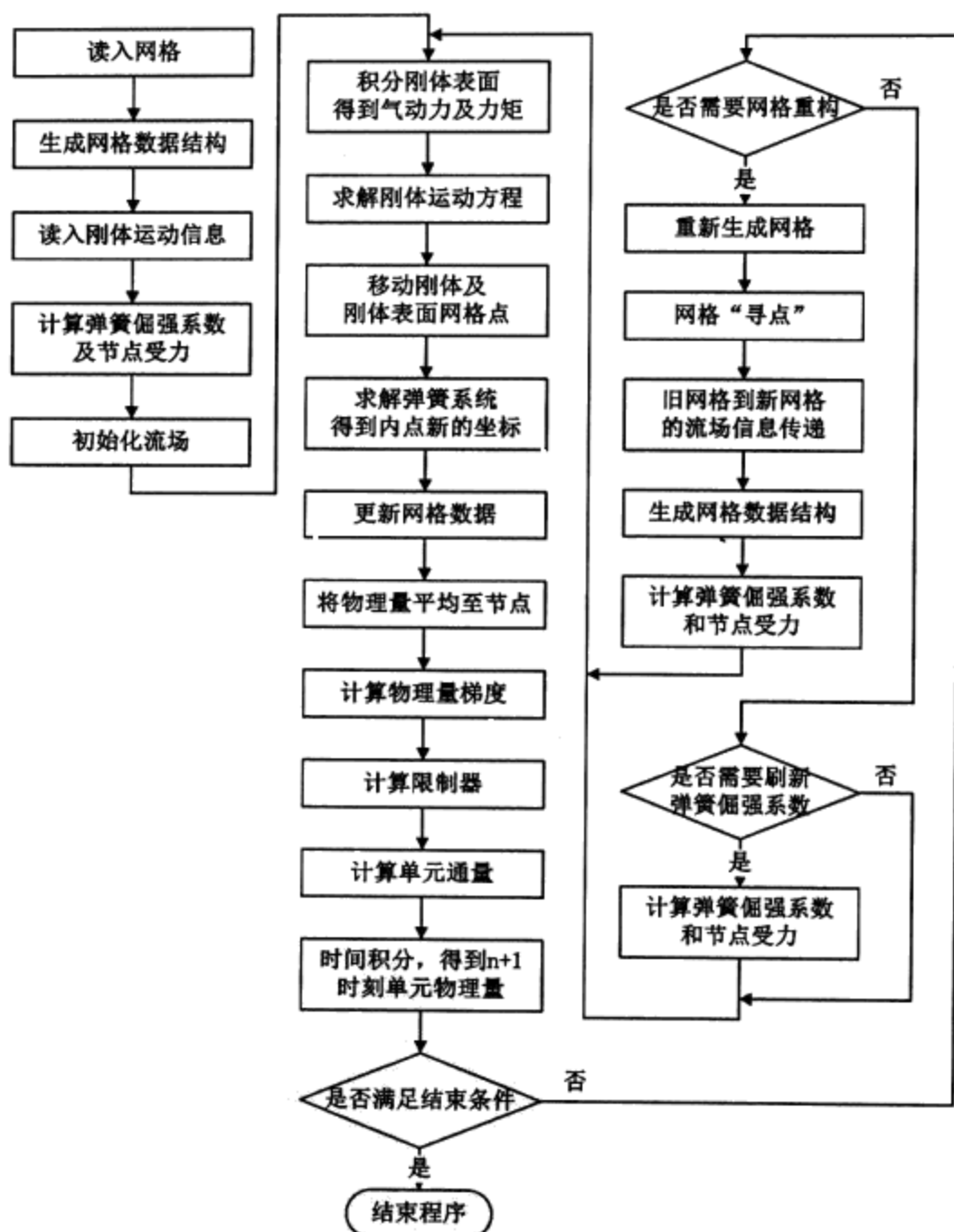


图 A.1 非结构动网格方法求解流程图

## 参 考 文 献

- [1] 郭正. 包含运动边界的多体非定常流场数值模拟方法研究[D]: [博士学位论文], 长沙: 国防科技大学, 2002.
- [2] 王巍. 有相对运动的多体分离过程非定常数值算法研究及实验验证[D]: [博士学位论文], 长沙: 国防科学技术大学, 2008.
- [3] 刘刚, 朱国林. 亚声速外挂物分离轨迹计算[A]. 见: 第七届全国计算流体力学会议论文集[C], 1994: 282 - 285.
- [4] 胡汉东, 杨其德, 马明生. 关于机弹干扰下外挂物气动力系数及投放轨迹的数值模拟[A]. 见: 第九届全国计算流体力学会议论文集[C], 1998: 408 - 413.
- [5] 杨永健, 张鲁民. 应用重迭网格技术求解复杂组合体无粘流场[J]. 空气动力学学报, 1991(1): 51 - 57.
- [6] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.
- [7] 张涵信, 沈孟育. 计算流体力学——差分方法的原理和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [8] 刘君. 差分格式的时间耗散效应对气动方程定常解精度的影响[A]. 见: 第九届全国计算流体力学会议论文集[C], 广西北海, 1998.
- [9] 刘君. 差分格式的时间耗散现象及探讨[A]. 见: 第八届全国计算方法讨论会[C], 四川绵阳, 1997.
- [10] 吴望一. 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1982.
- [11] 任玉新, 陈海欣. 计算流体力学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [12] P D Thomas, C K Lombard. The geometric conservation law — a link between finite-difference and finite-volume methods of flow computation on moving grids

- [R]. AIAA 78 - 1208, 1978.
- [13] P D Thomas, C K Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids[J]. AIAA Journal, 1979, 17(10): 1030 - 1037.
- [14] M Lesoinne, C Farhat. Geometric conservation laws for aeroelastic computations using unstructured dynamic meshes[R]. AIAA 95 - 1709, 1995.
- [15] B Koobus, C Farhat. Second-order implicit schemes that satisfy the GCL for flow computations on dynamic grids[R]. AIAA 98 - 0113, 1998.
- [16] 刘君,白晓征,张涵信,等. 关于变形网格“几何守恒律”概念的讨论[J]. 航空计算技术, 2009 年第 4 期, 待发表.
- [17] J Liu, X Bai, Z Guo, et al. A new method for transferring flow information among meshes[J]. Computational Fluid Dynamics Journal, 2007, 15(4): 509 - 514.
- [18] O C Pendergraft, R J Re, T T Kariya. Installation Effects of Wing-mounted Turbofan Nacelle-pylons on a 1/17 - Scale, Twin-engine, Low-wing Transport Model [R]. National Aeronautics and Space Administration, 1992.
- [19] 陈坚强,赫新,张毅峰,等. 跨大气层飞行器 RCS 干扰数值模拟研究 [A]. 见:第十二届全国计算流体力学会议论文集[C], 陕西西安, 2004.
- [20] J T Batina. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes [R]. AIAA 89 - 0115, 1989.
- [21] D G Mabey, B L Welsh, C R Pyne. A summary of measurements of steady and oscillatory pressures on a rectangular wing[J]. Aeronautical Journal, 1988, 92 (911): 10 - 28.
- [22] 郭正,谭杰,刘君. 振动矩形机翼非线性绕流数值研究[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(4): 13 - 17.
- [23] Z Guo, J Liu, Z Qu. New computation method to determine trim angle of attack for reentry vehicles[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2004, 41(6): 1063 - 1065.
- [24] 罗也凡,毕志献. 用自由翻滚法直接测定飞行体配平攻角的试验技术 [A]. 见:全国第八届高超声速流、第七届跨声速流学术论文集[C], 气动

中心超高速所, 1995.

- [25] R W MacCormack. A perspective on a quarter century of CFD research[R]. AIAA 93 - 3291 - CP, 1993.
- [26] 邓小刚, 宗文刚, 张来平, 等. 计算流体力学中的验证与确认[J]. 力学进展, 2007, 37(2): 279 - 288.
- [27] 白文. 气动计算软件可信度分析解决方案[A]. 见:第十二届全国计算流体力学会议论文集[C], 西安, 2004: 770 - 774.
- [28] 王巍, 刘君, 郭正. 子母弹抛壳过程非定常流动的数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2006, 24(3): 285 - 288.
- [29] 王巍, 刘君, 白晓征, 等. 非结构动网格技术及其在超声速飞行器头罩分离模拟中的应用[J]. 空气动力学学报, 2008, 26(1): 129 - 135.
- [30] 郭正, 刘君, 王巍. 解决非结构动网格接触 分离问题的一种新方法[A]. 见:中国第一届近代空气动力学与气动热力学会议论文集[C], 绵阳, 2006: 508 - 513.
- [31] 白晓征, 刘君, 郭正, 等. 冲压发动机进气道压力振荡过程的数值研究[J]. 推进技术, 2008, 29(5): 562 - 565.
- [32] 孙世贤, 黄圳圭. 理论力学教程[M]. 长沙: 国防科学技术大学出版社. 1997, 第1版.
- [33] 刘君, 王巍, 郭正, 等. 稠密大气层内火箭头罩动态分离过程数值模拟[J]. 弹道学报, 2006, 18(3): 34 - 38.
- [34] J Shipman, A Hosangadi, V Ahuja. Unsteady analyses of valve systems in rocket engine testing environment[R]. AIAA 2004 - 3663, 2004.
- [35] V Ahuja, A Hosangadi, P A Cavallo, et al. Analyses of transient events in complex valve and feed systems[R]. AIAA 2005 - 4549, 2005.
- [36] P A Cavallo, A Hosangadi, V Ahuja. Transient Simulations Of Valve Motion In Cryogenic Systems[R]. AIAA 2005 - 5252, 2005.
- [37] J D Baum, E L Mestreau, H Luo, et al. Modeling of near-field blast wave evolution[R]. AIAA 2006 - 0191, 2006.
- [38] 刘君, 周松柏, 徐春光. 超声速流动中燃烧现象的数值模拟方法及应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2008.

- [39] J B Mcvey, T Y Toong. Mechanism of Instability of exothermic hypersonic blunt-body flows[J]. Combustion Science and Technology, 1971, 3: 63 - 76.
- [40] S Yungster, K Radhakrishnan. A fully implicit time accurate method for hypersonic combustion: application to shock-induced combustion instability[R]. AIAA - 94 - 2965, 1994.
- [41] E L Lee, C M Tarver. Phenomenological model of shock initiation in heterogeneous explosives[J]. Physics of Fluids, 1980, 23(12): 2362.
- [42] C B Laney. Computational Gasdynamics[M]. Cambridge university press, 1998.
- [43] T Barth, M Oehlberger. Finite volume methods: foundation and analysis[A], in Encyclopedia of Computational Mechanics[C]. 2004, John Wiley & Sons, Ltd.
- [44] 郭正, 李晓斌, 瞿章华, 等. 用非结构动网格方法模拟有相对运动的多体绕流[J]. 空气动力学学报, 2001, 19(3): 310 - 316.
- [45] 郭正, 刘君, 瞿章华. 平面运动激波绕障碍物流动的非结构 Euler 解[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(6): 1 - 4.
- [46] 刘君, 郭正, 郭健, 等. 非结构网格技术应用于固体火箭发动机内流场数值模拟[J]. 固体火箭技术, 2001, 24(4): 9 - 11.
- [47] 郭正, 刘君, 李晓斌, 等. 高超声速验证飞行器助推分离段流场数值研究[J]. 推进技术, 2002, 23(3): 219 - 222.
- [48] 郭正, 刘君, 瞿章华. 非结构动网格在三维可动边界问题中的应用[J]. 力学学报, 2003, 35(2): 140 - 146.
- [49] 郭正, 瞿章华, 刘君. 用非结构动网格技术计算确定再入飞行器配平攻角[J]. 空气动力学学报, 2004, 22(3): 255 - 258.
- [50] 王巍, 刘君, 刘冰, 等. 火箭助推器从芯级飞行器动态分离过程的数值模拟[J]. 宇航学报, 2006, 27(4): 766 - 770.
- [51] 郭正, 刘君, 陈广南. 安溢活门动态特性的流固耦合数值分析[J]. 机械工程学报, 2008, 44(8): 61 - 66.
- [52] 郭正, 王广, 刘君, 等. 助推器侧向卸压喷流对尾舵气动干扰的数值研究[J]. 推进技术, 2008, 29(5): 578 - 582.
- [53] 刘君, 白晓征, 郭正, 等. 有相对运动多体动力学系统流动计算方法若干问题讨论[J]. 空气动力学学报, 2008, 26(1): 14 - 18.

- [54] 刘君, 白晓征, 王巍. 网格之间流场信息传递的高精度方法和验证[J]. 空气动力学学报, 录用待发表.
- [55] S A Bayyuk, K G Powell, B van Leer. Computation of flows with moving boundaries and fluid-structure interactions[R]. AIAA 97 - 1771, 1997.
- [56] P G Buning, R J Gomez, W I Scallion. CFD approaches for simulation of wing-body stage separation[R]. AIAA 2004 - 4838, 2004.

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名=非结构动网格计算方法：及其在包含运动界面的流畅模拟中的应用

作者=刘君，白晓征，郭正著

页数= 2 4 8

出版社=长沙市：国防科技大学出版社

出版日期= 2 0 0 9 . 0 6

S S 号= 1 2 4 5 2 9 0 2

D X 号= 0 0 0 0 0 6 8 2 2 2 4 2

U R L = h t t p : / / b o o k . s z d n e t . o r g . c  
n / b o o k D e t a i l . j s p ? d x N u m b e r = 0 0  
0 0 0 6 8 2 2 2 4 2 & d = F 4 9 B 5 3 D 9 4 3 A B 9 F A  
C D F 2 1 9 9 D 4 A F B 1 2 A 5 3