第19卷 建模专辑 2002年02月

工 程 数 学 学 报

JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol 19 Supp. Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0113-08

基金最佳使用计划

李少猛， 赵玉庆， 徐 品

指导老师： 夏江山

(海军后勤学院,天津塘沽 300450)

编者按:此文根据原题的条件与要求,在问题本身尚有一些不确定因素(比如基金到位时间,奖金发放日期等)的前提下,做出了必要的合理假设,然后针对原题所提出的三个问题,分别建立了比较简明的线性方程组模型。并就原题给出的数据,利用 Matlab 软件求出了准确的数据解。在建模过程中,作者抓住了问题的关键,从分析各种存款利率的最佳组合入手,选择出一种获利最大的存款策略。在处理每年发行国库券的时间不定这一较为复杂的问题时,文中采用了在购买国库券之前与到期之后的时间里再配以存一个半年定期与半年活期的方法,使得购买一个 k 年期的国库券成为一种 $k+1$ 年期的投资形式与各种存款方式比较优劣。论文思路清晰,方法灵活,文字表述亦较通顺,不失为一篇较好的大学生数学建模竞赛试卷。

摘 要:本文给出了基金存款策略的数学模型。对于基金 M 使用 n 年的情况而言,首先把 M 分成 n 份, 其中第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$份存款 x_i 存期为 i 年,那么只有当第 $i(i\leqslant n-1)$份资金按最佳存款策略存款到期后的本息和等于当年的奖学金数,并且第 n 份资金按最佳存款策略存款 n 年后的本息和等于原基金 M 与当年的奖学金数之和时,每年发放的奖学金才能达到最多。

通过求解此模型,我们得到了基金的最佳存款策略,并求出了在 $n=10$ 年,$M=5000$ 万元的情况下,基金的最佳使用方案。在可存款也可购买国库券时,采取一种转化方法,将国库券购买情况转化为相应年期的定期存款,结合问题(一)即可求得在 $n=10$ 年,$M=5000$ 万元的情况下,基金的最佳使用方案;在第三年校庆时奖学金数额比其它年度多 20% 的问题的分析方法和模型的解决方法与前相同。

关键词:基金;数学模型;最佳方案

分类号:AMS(2000) 91B28　　中图分类号:O224　　文献标识码:A

1 问题的提出

某校基金会有一笔数额为 M 元的基金,打算将其存入银行或购买国库券。当前银行存款及各期国库券的利率见下表。假设国库券每年至少发行一次,发行时间不定。取款政策参考银行的现行政策。

校基金会计划在 n 年内每年用部分本息奖励优秀师生,要求每年的奖金额大致相同,且在 n 年末仍保留原基金数额。校基金会希望获得最佳的基金使用计划,以提高每年的奖金额。请你帮助校基金会在如下情况下设计基金使用方案,并对 $M=5000$ 万元,$n=10$ 年给出具体结果:

1) 只存款不购国库券;

2) 可存款也可购国库券;

3) 学校在基金到位后的第3年要举行百年校庆,基金会希望这一年的奖金比其它年度

多20%。

	银行存款税后年利率(%)	国库券年利率(%)
活 期	0.792	
半年期	1.664	
一年期	1.800	
二年期	1.944	2.55
三年期	2.160	2.89
五年期	2.304	3.14

2 问题分析

综合分析问题(一) 参照存款年利率数据表可知,定期存款年限越长,存款税后年利率越大。因此,在不影响奖金发放的情况下,应尽可能存年限较长的定期存款,这样才能获得较高的利息。所以,此基金的最佳使用计划是:拿出一部分基金存入一年定期,一年后的本息全部用于发放第一年的奖金,再拿出一部分基金存入二年定期,二年后的本息全部用于发放第二年的奖金,以此类推,且每年发放奖金数额相同,最后一年存入银行的款项在发完奖金后仍然为基金总额 M。

分析问题(二) 研究题目所给的数据,我们可以发现,同期的国库券年利率明显高于银行存款的年利率,所以首先应考虑尽可能多的购买国库券,但由题意可知,国库券的发行时间不是固定的,若一味追求高利率,有时反而会增加活期存款所占的比重,所得平均年利率不一定为最优。我们利用逐个分析法研究在每个年限 n 中最佳的方案,然后归纳出总的公式,并针对具体数值,$M=5000$ 万元,$n=10$ 年,求出最佳存储方案,用问题一、二所归纳出的方案,我们只需把第三年的奖金增加20%,再分别代入两个最优方案,就可以求出在两种不同情况下的最佳基金存款方案。

3 模型假设

1) 每年发放奖学金一次,且均在年末发放。
2) 银行发行国库券时间不固定。
3) 由于近几年国库券销售市场很好,所以,国库券可在发行当日购买。
4) 国库券在没有到期之前,不得进行贴现。

4 模型建立

问题一:只存款不购买国库券的情况。

定理1 一定数额的资金 H 先存定期 m 年再存定期 k 年与先存定期 k 年再存定期 m 年,本息和相等。($m,k\in(1,2,3,5)$)

证明 设 L_m,L_k 分别为定期 m 年和 k 年的年利率,则一定数额的资金 H 先存定期 m 年再存定期 k 年的本息和为 $H(1+mL_m)(1+kL_k)$;先存定期 k 年再存定期 m 年的本息和为 $H(1+kL_k)(1+mL_m)$,

根据乘法交换律 $H(1+mL_m)(1+kL_k)=H(1+kL_k)(1+mL_m)$

定理一得证。

推论 1 一定数额的资金 H 若把存款年限 n 分成 j 个存期，$n=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_j$，其中 $n_i\in(0.5,1,2,3,5)$，$(i=1,2\cdots j)$，则 n 年后本息和与存期顺序无关。

定理 2 使一定数额的资金 H 存储 n 年后本息和最大的存款策略为

当 $n=1$ 时，存定期 1 年；

当 $n=2$ 时，存定期 2 年；

当 $n=3$ 时，存定期 3 年；

当 $n=4$ 时，先存定期 3 年，然后再存定期 1 年；

当 $n=5$ 时，存定期 5 年；

当 $n>5$ 时，首先存储个$[\frac{n}{5}]$个 5 年定期，剩余年限存储情况与 $n<5$ 时相同。

证明：下表中用形如(i,j)的形式表示存款策略，(i,j)表示先存 i 年定期，再存 j 年定期。

表 1 银行存款各种存款策略年均利率

	存款策略	银行存款税后年均利率(%)	最佳存款策略	银行存款税后最佳年均利率(%)
一年期	(1)	1.800	(1)	1.800
两年期	(1,1)	1.816	(2)	1.944
	(2)	1.944		
三年期	(1,1,1)	1.833	(3)	2.160
	(2,1)	1.919		
	(3)	2.160		
四年期	(1,1,1,1)	1.849	(3,1)	2.099
	(2,2)	1.982		
	(3,1)	2.099		
五年期	(1,1,1,1,1)	1.866	(5)	2.304
	(2,2,1)	1.974		
	(3,2)	2.124		
	(5)	2.304		
六年期	(3,3)	2.230	(5,1)	2.255
	(5,1)	2.255		

由上表可得，任何最佳存款策略中不能存在以下的存款策略(1,1)、(2,1)、(2,2)(3,2)和(3,3)。由 1,2,3,5 四种定期能够组成的最佳策略(5 年定期不重复)只能有(1)，(2)，(3)，(3,1)，(5)，(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,3,1)九种，它们分别对应 $n=1$ 到 9 年的最优存款策略，当 $n>9$ 时的最佳存款策略只能是首先重复存$[\frac{n}{5}]$个定期 5 年，剩余年限 $\mathrm{mod}(n,5)$只能是 1、2、3、4，当 $\mathrm{mod}(n,5)=1$ 时，再存 1 年定期；当 $\mathrm{mod}(n,5)=2$ 时，再存 2 年定期；当 $\mathrm{mod}(n,5)=3$ 时，再存 3 年定期；当 $\mathrm{mod}(n,5)=4$ 时，先存 3 年定期，再存 1 年定期。

定理 2 得证。

定理 3 基金 M 使用 n 年的情况，首先把 M 分成 n 份，其中第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$份基金 x_i 存款期限为 i 年，那么只有当第 $i(1\leqslant i\leqslant n-1)$份基金 x_i 按最优存款策略存款 i 年后的本息和等于当年的奖学金数，并且第 n 份基金按最佳存款策略存款 n 年后的本息和等于原基金 M 与当年的奖学金数之和时，每年发放的奖学金才能达到最多。

证明：当 $n=1$ 时，即将基金存入银行一年后的所得利息全部用于发放奖学金，此种情况

显然成立。

当 $n>1$ 时，首先需要证明：第一份基金 x_1 存入银行 1 年定期，到期后本息和正好等于奖学金数额 p，即 $x_1(1+1.8\%)=p$，$x_1=p/(1+1.8\%)$。

下面试用反证法予以证明：

假设 $x_1 \neq p/(1+1.8\%)$，可分两种情况：

（一） 假设 $x_1<p/(1+1.8\%)$，那么基金 x_1 存入银行 1 年后，到期本息和小于奖学金数额 p，为了使每年的奖学金数额尽可能相同，所差资金只能从其它定期存款中按活期存款提前支取，这样做的结果比按 $x_1=p/(1+1.8\%)$ 存一年定期（即到期本息和正好等于奖学金数额），其它基金均按定期存款的总利息要少。为使奖学金数额最大，所以 $x_1 \nless p/(1+1.8\%)$

（二） 假设 $x_1>p/(1+1.8\%)$，那么基金 x_1 存入银行 1 年，到期后本息和大于奖学金数额 p，剩余资金再按最优存款策略存 k 年，这种情况所得利息显然不比在开始时多余部分资金直接按最优存款策略存 $k+1$ 年后利息多，所以 $x_1 \ngtr p/(1+1.8\%)$。

因此 $x_1=p/(1+1.8\%)$。

同理可证，为使奖学金数额最大，第 i 份基金 $x_i(1<i\leqslant n-1)$ 按最优存款策略存 i 年后本息和应正好等于奖学金数额。

第 n 份基金为 $M-\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ 存储 n 年应按最佳策略存款。根据问题条件，第 n 份基金按最优策略存 n 年后所得本息和应为 $M+p$。

定理 3 得证。

5 模型的求解

由定理 1、定理 2、定理 3 可得 n 年的最佳存款方案公式一为（其中 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示把基金 M 分成 n 份中的第 i 份基金，P 为每年的奖学金数额）：

$$x_1(1+1.8\%)=P$$

$$x_2(1+1.944\%\times 2)=P$$

$$x_3(1+2.16\%\times 3)=P$$

$$x_4(1+2.16\%\times 3)(1+1.8\%)=P$$

$$x_5(1+2.304\%\times 5)=P$$

$$x_j\left(\frac{P}{x_5}\right)^{[\frac{j}{5}]}\left(\frac{P}{x_{(j-5[\frac{j}{5}])}}\right)=\mathrm{P} \quad \text{当 } 6\leqslant j\leqslant n-1 \text{ 且 } j-5\left[\frac{j}{5}\right]\neq 0$$

$$x_j\left(\frac{P}{x_5}\right)^{[\frac{j}{5}]}=\mathrm{P} \qquad \text{当 } j-5\left[\frac{j}{5}\right]=0$$

$$\left(M-\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)\left(\frac{P}{x_5}\right)^{[\frac{n}{5}]}\left(\frac{P}{x_{(n-5[\frac{n}{5}]}}\right)=P+M$$

据上公式可用 Matlab 求得 $n=10$ 年，$M=5000$ 万元时基金使用的最佳方案：

奖学金 $p=109.816947$（万元）

表 2　x_i 值及其存 i 年的最佳存款策略

	资金数额(万元)	最佳存款策略
x_1	107.875194	(1)
x_2	105.707057	(2)
x_3	103.133872	(3)
x_4	101.310287	(3,1)
x_5	98.472872	(5)
x_6	96.731702	(5,1)
x_7	94.787533	(5,2)
x_8	92.480158	(5,3)
x_9	90.844949	(5,3,1)
x_{10}	4108.656375	(5,5)

表 3　M = 5000 万元，n = 10 年基金使用最佳方案(单位：万元)

	存 1 年定期	存 2 年定期	存 3 年定期	存 5 年定期	取款数额(到期本息和)	每年发放奖学金数额
第一年初	107.875194	105.707057	204.4444159	4581.97359		
第一年末					109.816947	109.816947
第二年末					109.816947	109.816947
第三年末	107.875194				217.692141	109.816947
第四年末					109.816947	109.816947
第五年末	107.875194	105.707057	204.4444159	4691.790281	5109.816947	109.816947
第六年末					109.816947	109.816947
第七年末					109.816947	109.816947
第八年末	107.875194				217.692141	109.816947
第九年末					109.816947	109.816947
第十年末					5109.816947	109.816947

问题二的求解

我们对可购买国库券也可存款这种情况，考虑到国库券发行日期不定，若准备购买它，则一般需要等待一段时间，因为一年内至少发行一次国库券，有可能上半年发行，也有可能下半年发行，所以我们首先把准备购买国库券的资金全部按半年定期存储，如果上半年未发行国库券，7 月 1 日取出本息后再存半年定期，如果下半年的某日比如 8 月 1 日发行国库券，则取出资金购买国库券，但这部分资金未到期，只能按活期计息。如果是购买两年国库券，则两年国库券到期后，因未到期末，肯定面对继续采取怎样的存储策略的问题，或者存定期，或者存活期，或者等待购买国库券。如果等待购买国库券，因国库券发行时间未定，有可能还要等待将近一年的时间，如果准备存整年定期，那么等到基金使用最后一年的 8 月 1 日即可到期，剩下的 5 个月只能存活期。

根据定理 2 可得：

推论 2　购买国库券时，需要存半年的定期和总共半年的活期。

一定数量的资金存储 n 年，存期种类相同，任意改变顺序，本息保持不变。再加上以上分析，如果准备购买两年期国库券可以这样想象：先存半年定期、再存 1 个月的活期，在 8 月 1 日购买两年期的国库券，两年后的 8 月 1 日取出国库券的本息后，再存 5 个月的活期，即需要存

半年的定期和总共半年的活期。

单位资金购买两年国库券、存入银行半年定期和半年活期后的本息为：

$$(1+2.55\%\times2)\times(1+0.792\%\times0.5)\times(1+1.644\%\times0.5)=1.0638$$

这种存款策略稍劣于存入银行的三年定期、其年利率为：

$$(1.0638-1)/3\approx0.0213=2.13\%$$

同理，单位资金购买三年期国库券、存入银行半年定期和半年活期后的本息为：

$$(1+2.89\%\times3)\times(1+0.792\%\times0.5)\times(1+1.644\%\times0.5)=1.09997$$

这种存储策略稍优于存入银行的四年定期，其年利率为：

$$(1.09997-1)/4\approx0.02499=2.499\%$$

单位资金购买五年期国库券、存入银行半年定期和半年活期后的本息为：

$$(1+3.14\%\times5)\times(1+0.792\%\times0.5)\times(1+1.644\%\times0.5)=1.1711$$

这种存储策略稍优于存入银行的六年定期，其年利率为：

$$(1.1711-1)/6\approx0.02852=2.852\%$$

在上面的分析中，因购买国库券而带来的总共半年的两次活期存款，其本息是按一次半年活期计算的，它与按一次半年活期计算，其本息差别很小，可以忽略不计。

所以，可以不考虑购买两年国库券情况。

购买三年期国库券再加半年活期和半年定期共四年的平均年利率2.499%大于先存三年定期再存一年定期存款最大的四年平均年利率2.099%。

所以，增加一项定期四年存款，其年利率为2.499%。

购买五年期国库券再加半年活期和半年定期共六年的平均年利率2.852%大于先存五年定期再存一年定期存款最大的六年平均年利率2.255%。

所以，增加一项定期六年存款，其年利率为2.852%。

	银行存款税后年利率(%)
活期	0.792
半年期	1.644
一年期	1.800
二年期	1.944
三年期	2.160
四年期	2.499
六年期	2.852

当 n=1 时，因没有一年期国库券，基金只能存入银行，基金使用方案参照问题一。

当 n=2 时，可以购买国库券、但由于国库券发行日期正好在1月1日的概率非常小、因此、最终国库券到期日可能在第三年的某月、这样就影响了第二年末的奖金发放，所以，也只能把基金存入二年定期，而不购买国库券。

根据以上的推理，可得 n 年的最优存储方案公式二为：

$$x_1(1+1.8\%)=P$$

$$x_2(1+1.944\%\times2)=P$$

$$x_3(1+2.16\%\times3)=P$$

$$x_4(1+2.89\%\times3)(1+0.792\%\times0.5)(1+1.644\%\times0.5)=P$$

$$x_5(1+2.89\%\times3)(1+0.792\%\times0.5)(1+1.644\%\times0.5)(1+1.8\%)=P$$

$$x_6(1+3.14\%\times5)(1+0.792\%\times0.5)(1+1.644\%\times0.5)=P$$

$$x_j\left(\frac{P}{x_6}\right)^{[\frac{j}{6}]}\left(\frac{P}{x_{(j-6[\frac{j}{6}])}}\right)=P \qquad \text{当 } 7\leqslant j\leqslant n-1 \text{ 且 } j-6[\frac{j}{6}]\neq0$$

$$x_j\left(\frac{P}{x_6}\right)^{[\frac{j}{6}]}=P \qquad \text{当 } j-6[\frac{j}{6}]=0$$

$$\left(M-\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)\left(\frac{P}{x_6}\right)^{[\frac{n}{6}]}\left(\frac{P}{x_{(n-6[\frac{n}{6}])}}\right)=P+M$$

据上公式用 Matlab 可以求得 $n=10$ 年，$M=5000$ 万元时基金使用的最优方案：(单位：万元)

每年奖学金：$P=127.423384$

$x_1=125.170318$，$x_2=122.654574$，$x_3=119.668843$，$x_4=115.842454$，

$x_5=113.794159$、$x_6=108.803799$，$x_7=106.879959$，$x_8=104.731825$，

$x_9=102.182380$，$x_{10}=3980.271687$

问题三求解：

方案一：只存款不购买国库券

因学校要在基金到位后的第 3 年举行校庆，所以此年奖金应是其他年度的 1.2 倍，计算公式只需把公式一、公式二中：$x_3(1+2.16\%\times3)=P$ 改为 $x_3(1+2.16\%\times3)=1.2P$

利用 Matlab 软件求解(程序略)$M=5000$ 万元，$n=10$ 年基金使用最佳方案：(单位：万元)

表 4　$M=5000$ 万元，$n=10$ 年基金使用最佳方案(单位：万元)

	存 1 年定期	存 2 年定期	存 3 年定期	存 5 年定期	取款数额(到期本息和)	每年发放奖学金数额
第一年初	105.650679	103.527252	220.429705	4570.392364		
第一年末					107.552392	107.552392
第二年末					107.552392	107.552392
第三年末	105.650679				234.713549	129.062870
第四年末					107.552392	107.552392
第五年末	105.650679	103.527253	220.429705	4678.147602	5107.7552392	107.552392
第六年末					107.552392	107.552392
第七年末					107.552392	107.552392
第八年末	105.650679				213.203071	107.552392
第九年末					107.552392	107.552392
第十年末					5107.7552392	107.552392

方案二、既可存款又可购买国库券

当 $n=1,2$ 时不涉及到校庆问题，分配方案参照问题二。

当 $n=3$ 时，将钱直接存入银行，分配方案参照问题一。

当 $n=4$ 时，执行方案为购买三年期国库券、一个半年定期与一个半年的活期，策略为：

$$x_1(1+0.018)=P_4$$

$$x_2(1+0.01944\times2)=P_4$$

$$x_3(1+0.0216\times3)=1.2P_4$$

$$(M-x_1-x_2-x_3)+(1+0.0289\times3)(1+0.01644\times0.5)(1+0.00792\times0.5)=M+P_4$$

解得：$x_1 = 115.291609$，$x_2 = 112.974413$，$x_3 = 132.269187$，$x_4 = 4639.464791$，$P_4 = 117.366858$

根据以上的求解，只需将问题二最优方案中第三年的奖学金数乘以1.2即可得到本方案的最佳使用情况。

利用Matlab软件求解(程序略)$M = 5000$万元，$n = 10$年基金使用最优方案：(单位：万元)

每年奖学金：$P = 124.754224$

$x_1 = 122.548353$，$x_2 = 120.085307$，$x_3 = 140.594542$，$x_4 = 113.415882$，

$x_5 = 111.410493$，$x_6 = 106.524666$，$x_7 = 104.641126$，$x_8 = 102.537989$，

$x_9 = 100.041948$，$x_{10} = 3978.199695$

6 模型评价

本模型有以下优点：

1） 模型在建立过程中充分考虑到学校基金的特殊性，得出最佳的分配方案。

2） 利用Mat lab软件编程进行求解，所得结果误差小，数据准确合理。

3） 利用优化组合法，分组比较，得出一段年限内最大的平均利率。

4） 该模型实用性强，对现实有很强的指导意义。

5） 购买国库券时，证明了发行日期对利率的影响很小，可以忽略不计，使问题简化。

参考文献：

[1] 姜启源．数学模型(第二版)[M]．高等教育出版社．1993年8月第2版

[2] 程卫国等．MATLAB5.3应用指南[M]．人民邮电出版社 1999年11月第1版

附录(略)

Optical Scheme for Using Funds

LI Shao-meng， ZHAO Yu-qing， XU Pin

Teacher： XIA Jiang-shan

(*Institute of naval service*, *Tianjin 300450*)

Abstract: The mathematical model of the funds deposit scheme was proposed in this paper. For fund M is to be used for n years First fund M can be divided into n parts. We assume one of them is (the number is more than or equal to 1 and less than or equal to n), Its time limit is years. only when the sum of the capital and interest equals to the amount of scholarship at that year at the expiration of deposit (number is less than or equal to n−1) according to the optimal funds deposit scheme. Moreover, when the sum of capital and interest equals to the sum of M and the scholarship at that year at the expiration of deposit The amount of scholarship can attain the largest grant.

By calculating this mathematical model, Optimal funds deposit scheme was found. For n equals to 10 years and M equals to 5000 ten thousand yuans, Optimal funds deposit scheme was found. when we can choose to deposit or purchase nation bond, The problem that purchase nation bond is converted into deposit in the same time. combined question one we could found the optimal funds deposit scheme when n equal to 10 years and M equal 5000 ten thousand yuans In the third school anniversary, the analysis method about the amount of scholarship 20% more than other years and the solving method are same as the former.

Key words: funds; mathematical; optical scheme